Università degli Studi di Udine

DIPARTIMENTO DI SCIENZE MATEMATICHE, INFORMATICHE E FISICHE

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea triennale

La compattificazione di Stone-Čech di $\boldsymbol{\omega}$ e l'esistenza di P-punti

Relatore:
Dikran Dikranjan

Laureando:
Andrea Brun
Matricola 132616

Anno Accademico 2019–2020

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Consideriamo l'insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$, o ω se si considera nella sua veste di numero ordinale), e dotiamolo della topologia discreta, dove un aperto di $\mathbb{N}$ è un suo qualunque sottoinsieme.
Chiaramente $\mathbb{N}$ non è uno spazio compatto; ci si chiede quindi quando $\mathbb{N}$ può essere immerso in uno spazio compatto come sottoinsieme denso. Gli spazi compatti in cui $\mathbb{N}$ si può immergere come sottoinsieme denso si chiamano compattificazioni di $\mathbb{N}$.

Tra tutte le possibili compattificazioni di uno spazio topologico se ne può sempre identificare una massimale, ovvero una compattificazione intuitivamente più grande di tutte le altre. In questa tesi si studierà la compattificazione di Stone-Čech, la compattificazione massimale per l'insieme dei numeri naturali, che d'ora in poi indicheremo con ω. La compattificazione di Stone-Čech di ω, che si indica con la notazione $\beta\omega$, si può costruire in diversi modi.

Nel nostro caso costruiremo $\beta\omega$ partendo dall'insieme di tutti gli ultrafiltri su ω. Successivamente si vedrà che questo spazio così costruito è uno spazio normale e totalmente disconnesso.

Tuttavia l'interesse scaturito da $\beta\omega$ è dovuto ad un suo sottospazio chiuso detto "corona", che corrisponde a $\beta\omega$ privato del sottoinsieme omeomorfo ad ω in esso contenuto. Nella tesi ci riferiremo a questo spazio con la notazione ω^*.

Uno spazio topologico si dice omogeneo se per ogni coppia di punti, esiste almeno un omeomorfismo che manda uno nell'altro. Ad esempio, l'insieme dei numeri naturali con la topologia discreta è uno spazio omogeneo in quanto banalmente ogni permutazione è un omeomorfismo.

Nel 1955, ci si chiese se l'omogeneità di uno spazio topologico X implicasse l'omogeneità dello spazio $X^* = \beta X \setminus X$, dove βX indica la compattificazione di Stone-Čech di X. L'anno successivo Walter Rudin rispose negativamente, dimostrando, sotto l'assunzione dell'ipotesi del Continuo, che esistono dei punti particolari in ω^*, i quali non possono essere mandati, da un omeomorfismo, in un altro punto arbitrario dello spazio.
Questi punti sono tali che l'intersezione di una qualunque famiglia numerabile di intorni è ancora un intorno, e sono detti P-punti. Tuttavia esistono punti che non sono P-punti, come vedremo nel Capitolo 4, da cui seguirà, sotto l'assunzione dell'ipotesi del Continuo, che ω^* non è omogeneo.
Successivamente, si scoprì che i P-punti in ω^* si possono costruire anche con la negazione dell'ipotesi del Continuo, a patto di assumere altre ipotesi che

estendono la Teoria degli Insiemi più deboli dell'Ipotesi del Continuo. Nel Capitolo 4 vedremo che si può provare l'esistenza di P-punti anche utilizzando l'Assioma di Martin, che in particolare è consistente con la negazione dell'Ipotesi del Continuo.

A questo punto fu naturale chiedersi cosa fosse possibile dire riguardo l'omogeneità di ω^* senza ulteriori ipotesi insiemistiche.
Nel 1978 Kenneth Kunen dimostrò, in ZFC, che ω^* non è omogeneo, introducendo il concetto di weak P-point. Un punto si dice weak P-point se non è punto di accumulazione per nessun sottoinsieme numerabile dello spazio. Si vede facilmente che ogni P-punto è anche weak P-point, tuttavia l'esistenza di weak P-points si dimostra senza ulteriori assunzioni.
Quattro anni dopo la pubblicazione del lavoro di Kunen sull'esistenza di weak P-points in ω^*, nel 1982, Saharon Shelah dimostrò che l'esistenza di P-punti non può essere provata all'interno della teoria degli insiemi. Infatti, con il suo famoso teorema "P-points indipendence Theorem" provò l'indipendenza dell'esistenza di P-punti da ZFC, costruendo un modello con cardinalità del continuo pari ad $\aleph_2$, in cui non esistono P-punti in ω^*.

Rimase un problema aperto fino ai giorni nostri se fosse possibile costruire un modello per la teoria degli insiemi con cardinalità del continuo arbitrariamente grande, in cui non esistono P-punti. Nel 2017, David Chodounský e Osvaldo Guzmán pubblicarono un articolo [12] in cui costruirono un modello nel quale non esistono P-punti, con cardinalità del continuo arbitrariamente grande.

Lo scopo della tesi è quello di presentare alcuni dei risultati più importanti degli ultimi settant'anni sullo spazio $\beta\omega$ e sull'esistenza di P-punti.

Nel Capitolo 2 si introducono alcune definizioni e lemmi fondamentali, partendo dalle definizioni di filtro e ideale su un insieme (§2.1). Si passa poi ad una breve introduzione ai concetti di ordine e ordine parziale (§2.1.1), che prepara il terreno per la nozione di ultrafiltro, esposta nella sezione §2.1.2.

Si passa poi a §2.2, dove si danno alcune definizione di base della Teoria degli insiemi, come quella di numero ordinale, di cardinale e si introduce la struttura di reticolo.
Si daranno anche alcune definizioni proprie del Forcing, che useremo in seguito.

In §2.3 si inizierà a parlare di topologia. Si daranno alcune definizioni e proprietà generali per poi trattare brevemente gli assiomi di separazione, la connessione e infine la compattificazione di uno spazio topologico (§2.3.4).

Si passa poi al Capitolo 3, nel quale si costruisce lo spazio topologico $\beta\omega$, partendo, come accennato sopra, dall'insieme di tutti gli ultrafiltri su ω. Dopo aver dotato quest'insieme di un opportuna topologia, si verificherà che è effettivamente uno spazio compatto (§3.2), che ha un sottoinsieme denso e numerabile (§3.3), e infine che effettivamente risulta essere la compattificazione di Stone-Čech di ω (§3.4). Detto questo si passerà a dimostrare alcune proprietà salienti dello spazio; si dimostrerà la non metrizzabilità dello spazio e si stabiliranno alcuni invarianti cardinali quali peso e cardinalità.

Nel Capitolo 4 ci si focalizzerà, in particolare, sullo spazio ω^*. Nella sezio-

ne introduttiva (§4.1) si definiranno alcuni concetti insiemistici come il quasi-contenimento e la pseudo-intersezione di insiemi, di cui ci serviremo per introdurre i P-filtri. Dopodiché arriviamo alla definizione di P-punto, seguita da un lemma che lega i concetti di P-punto e P-filtro.
Si passa poi a parlare dello spazio ω^*, e si dimostra che, come $\beta\omega$, ha peso $\mathfrak{c}$.
Nella sezione (§4.3.1), si esporrà brevemente, senza dimostrazione, il Teorema di Kunen (1978), riguardante l'esistenza di weak P-points in ω^* senza ulteriori assunzioni insiemistiche.
Nella sezione successiva §4.4 si dimostra il Teorema di Rudin accennato sopra, che stabilisce l'esistenza di P-punti in ω^* sotto l'assunzione dell'ipotesi del Continuo. Seguirà quindi che lo spazio ω^* non è omogeneo (corollario 4.4.4), rispondendo alla domanda posta nel 1955.

In §4.5 si dimostrerà invece che l'esistenza di P-punti in ω^* può essere provata anche senza l'ipotesi del Continuo, utilizzando l'Assioma di Martin e il concetto di famiglia dominante di funzioni.

Infine, nel Capitolo 5 si conclude brevemente presentando, senza dimostrazione, il "*P-points indipendence theorem*" (1982), di S. Shelah, e si chiuderà con una breve presentazione degli ultimi risultati accennati precedentemente.

Capitolo 2

Preliminari

2.1 Filtri e Ideali

In questa sezione daremo le definizioni di filtro e ideale su un insieme, di ultrafiltro, di filtro principale e libero. Si dimostreranno alcune proprietà dei filtri come il teorema dell Ultrafiltro, e che un ultrafiltro libero non può avere elementi finiti.

Definizione 2.1.1. Un *filtro* su un insieme non vuoto X è una collezione $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X tali che:

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

2) se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$, allora $A \cap B \in \mathcal{F}$,

3) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, allora $B \in \mathcal{F}$.

Definizione 2.1.2. Un *ideale* su un insieme non vuoto X è una collezione $\mathcal{I}$ di sottoinsiemi di X tali che:

1) $X \notin \mathcal{I}$,

2) se $A \in \mathcal{I}$ e $B \in \mathcal{I}$, allora $A \cup B \in \mathcal{I}$,

3) se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, allora $B \in \mathcal{I}$.

Queste definizioni saranno date in un caso più generale in §2.2.3, dove filtri e ideali non saranno costituiti da sottoinsiemi di un dato insieme X, ma da elementi di una struttura più astratta, quella di reticolo.

Osservazione 2.1.3. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X. L'insieme $\{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$ è un ideale, detto *ideale duale* di $\mathcal{F}$, e si indica con $\mathcal{F}^*$. Analogamente esiste anche il filtro duale di un ideale.

Definizione 2.1.4. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia non vuota di insiemi, si dice che $\mathcal{A}$ ha la proprietà dell'intersezione finita *P.I.F.* se per ogni sottoinsieme finito $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ si ha che $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$.

Lemma 2.1.5. *Sia A un insieme. Se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ha la P.I.F., allora esiste un filtro $\mathcal{F}$ che estende $\mathcal{G}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutti i sovrainsiemi delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{G}$; allora $\mathcal{F}$ è un filtro, ed estende $\mathcal{G}$. $\square$

Definizione 2.1.6. Una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi non vuoti di X si dice *base di filtro* se $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $\exists C \in \mathcal{B}$ tale che $C \subseteq A \cap B$.

2.1.1 Ordini Parziali

Introduciamo qui il concetto di ordine su un insieme, che verrà poi ripreso e ampliato in §2.2.1.

Definizione 2.1.7. Una relazione binaria $\leq$ su un insieme P si dice *ordine parziale*, se è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva. In altre parole, per ogni $p, q, r \in P$ vale:

1) $p \leq p$,

2) se $p \leq q$ e $p \neq q$, allora $q \not\leq p$,

3) se $p \leq q$ e $q \leq r$, allora $p \leq r$.

Un ordine, come ogni relazione binaria, si può vedere anche come sottoinsieme del prodotto cartesiano $P \times P$.
Sia r una relazione binaria su un insieme P. Si scrive, per $a, b \in P$, $a\ r\ b$ se $(a, b) \in r$. Nel nostro caso, ad esempio, la condizione 1) della Definizione 2.1.7, equivale a dire che per ogni $a \in P$, la coppia (a, a) appartiene a $\leq$.
Un insieme P con un ordine parziale si dirà *insieme parzialmente ordinato*, o *poset*.

Definizione 2.1.8. Per un sottoinsieme S di un insieme parzialmente ordinato P, un *maggiorante* di S è un elemento $u \in P$ tale che per ogni $s \in S$, $s \leq u$.
Un *minorante* di S è un elemento $l \in P$ tale che $l \leq s$ per ogni $s \in S$.

Definizione 2.1.9. Una relazione binaria $<$ su un insieme P si dice *ordine parziale stretto* se è antisimmetrica, transitiva e antiriflessiva.

Utilizzando quanto detto a proposito delle relazioni binarie, possiamo facilmente stabilire una corrispondenza naturale tra ordini parziali e ordini parziali stretti.
Infatti, sia $\leq$ un ordine parziale su un insieme P. Come abbiamo detto, $\leq$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $P \times P$, e la condizione 1) nella Definizione 2.1.7 impone che le coppie del tipo (a, a), con $a \in P$ appartengano a $\leq$.
Per ottenere da $\leq$ un ordine parziale stretto sarà quindi sufficente eliminare la diagonale di $P \times P$.
Viceversa, per avere un ordine parziale da un ordine parziale stretto $<$, è sufficiente prendere la relazione definita da

$$< \;=\; \leq \;\cup \{(a, a) : a \in P\}.$$

Definizione 2.1.10. Un ordine parziale $\leq$ su un insieme P si dice *ordine totale*, o *ordine lineare*, se per ogni $p, q \in P$ vale

$$p \leq q \text{ oppure } q \leq p.$$

Si estende la definizione di ordine lineare anche per gli ordini parziali stretti. Un ordine parziale stretto $<$ è detto *ordine totale*, o *ordine lineare*, se:

$$\forall p, q \in P \quad p < q \ \wedge \ p = q \ \wedge \ q < p.$$

Un insieme su cui è definito un ordine totale si dice *insieme totalmente ordinato*, o *catena*.

2.1.2 Filtri massimali e principali

L'insieme di tutti i filtri su un insieme X si denota con $\mathfrak{Fil}(X)$. La relazione $\subseteq$ su $\mathfrak{Fil}(X)$ è un ordine parziale.

Definizione 2.1.11. Un filtro $\mathcal{U}$ su un insieme X si dice *ultrafiltro* se è massimale.

Lemma 2.1.12. *Un filtro $\mathcal{F}$ su X è un ultrafiltro se e solo se per ogni $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Dimostrazione. ($\leftarrow$) Sia $\mathcal{F}$ un filtro tale che per ogni $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ oppure $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Allora $\mathcal{F}$ è massimale. Infatti, sia $\tilde{\mathcal{F}}$ un filtro che estende $\mathcal{F}$; allora esiste $Y \in \tilde{\mathcal{F}}$ che non sta in $\mathcal{F}$. Per ipotesi $X \setminus Y \in \mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$, quindi si ha $(X \setminus Y) \cap Y = \emptyset \in \tilde{\mathcal{F}}$, assurdo.
($\rightarrow$) Sia $\mathcal{F}$ filtro massimale, con $Y \notin \mathcal{F}$. Proviamo che $X \setminus Y \in \mathcal{F}$. Consideriamo $\mathcal{G} = \{Z \subseteq X \ : \ Z \cup Y \in \mathcal{F}\}$. Chiaramente $X \setminus Y \in \mathcal{G}$, e $\mathcal{G}$ è un filtro che contiene $\mathcal{F}$; per la massimalità di $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F} \ni X \setminus Y$. □

Lemma 2.1.13 (Lemma di Zorn)**.** *Se X è un insieme parzialmente ordinato tale che ogni catena di X ha maggiorante in X, allora X contiene almeno un elemento massimale.*

Teorema 2.1.14 (Teorema dell'Ultrafiltro)**.** *Ogni filtro può essere esteso ad un ultrafiltro.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{\mathcal{F}}$ un filtro su X. Sia P l'insieme di tutti i filtri $\mathcal{F}$ su X tali che $\mathcal{F} \supseteq \tilde{\mathcal{F}}$, e consideriamo l'ordine parziale dato dal contenimento su P. Se C è una catena su $(P, \subseteq)$ (vedi Definizione 2.1.10), allora $\bigcup C$ è un filtro. Infatti, siano A, B due elementi di $\bigcup C$. Allora esistono due filtri $\mathcal{F}_A$ e $\mathcal{F}_B$ in C tali che $A \in \mathcal{F}_A$ e $B \in \mathcal{F}_B$. Poiché C è una catena, si ha $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$, $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_B$ oppure $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{F}_A$. Quindi $A \cap B$ appartiene ad $\mathcal{F}_B$ oppure a $\mathcal{F}_A$ essendo questi filtri, da cui $A \cap B \in \bigcup C$. Allo stesso modo si vede la chiusura per sovrainsiemi.
Ovviamente $\bigcup C$ è maggiorante per la catena C in quanto estende ogni elemento di C, ed estende $\tilde{\mathcal{F}}$.
Ora, per il Lemma di Zorn (2.1.13), esiste un elemento massimale $\mathcal{U}$ in $(P, \subseteq)$. Il filtro $\mathcal{U}$ soddisfa la Definizione 2.1.11, quindi è un ultrafiltro, e contiene $\tilde{\mathcal{F}}$. □

Definizione 2.1.15. Un filtro $\mathcal{F}$ si dice *principale* se $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$.

Osservazione 2.1.16. Se $\mathcal{F}$ è *filtro principale*, detto $A := \bigcap \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ sarà composto da tutti gli elementi $F \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$ tali che $A \subseteq F$. In questo caso $\mathcal{F}$ è anche detto *filtro generato* da A e si indica con $[A]$.

Proposizione 2.1.17. *Un filtro principale $[A]$ è un ultrafiltro se e solo se A è un singoletto.*

Dimostrazione. Se $A = \{a\}$, allora [A] è massimale per $\mathfrak{Fil}(X)$; se vi fosse un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \mathfrak{Fil}(X)$ che estende propriamente [A], allora ci sarebbe almeno un elemento $T \in \mathcal{P}(X)$ tale che $T \in \mathcal{U}$ e $T \notin [A]$. Poiché $[A]$ contiene tutti i sovrainsiemi di $\{a\}$, $a \notin T$. Allora $\mathcal{U} \ni A \cap T = \emptyset$.

Viceversa, se A non è un singoletto, ogni filtro generato da sottoinsiemi propri di A lo estende propriamente $[A]$, e quindi $[A]$ non è ultrafiltro. □

Nota. Un ultrafiltro non principale si dice *libero*.

Osservazione 2.1.18. Un ultrafiltro libero non ha elementi finiti.
Infatti se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro libero e $\mathcal{U} \ni A \subseteq X$ finito, allora si hanno due casi:

- $\exists a \in A$ tale che $\{a\} \in \mathcal{U}$, e allora $\mathcal{U}$ ultrafiltro principale, assurdo.
- $\forall a \in A\ X \setminus \{a\} \in \mathcal{U}$ (per la definizione di ultrafiltro).
  Ma allora $\mathcal{U} \ni \left(\bigcap_{a \in A} X \setminus \{a\}\right) \cap A = \emptyset$, assurdo.

2.2 Teoria degli insiemi

2.2.1 Numeri ordinali

Definizione 2.2.1. Un ordine lineare $<$ su un insieme P si dice *buon ordine* se ogni sottoinsieme non vuoto di P ha un elemento minimo.

Definizione 2.2.2. Un insieme T è *transitivo* se ogni elemento di T è un sottoinsieme di T.

Definizione 2.2.3. Un insieme T è un *ordinale* se è transitivo e bene ordinato da $\in$. La classe di tutti gli ordinali si denota con Ord.

D'ora in poi gli ordinali verranno indicati con le lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Con $\alpha \in Ord$ si intenderà α è un ordinale.

Osservazione 2.2.4. La classe Ord è bene ordinata da $\in$. Su Ord si userà il simbolo $<$ per riferirsi all'appartenenza.

Esempio 2.2.5. Diamo ora alcuni esempi di ordinali; $\emptyset$ è il primo ordinale in quanto ovviamente soddisfa la definizione. Ogni insieme transitivo di ordinali è un ordinale, quindi anche gli insiemi $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ sono ordinali, e sono identificati con i numeri naturali finiti $1, 2, \ldots$;

Definizione 2.2.6. Siano α, β due ordinali. α è il *successore* di β (e si scrive $\alpha = S(\beta)$) se $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

Definizione 2.2.7. Un ordinale α si dice:

· *ordinale successore* se $\exists \beta$ tale che $\alpha = S(\beta)$,

· *ordinale limite* se non è successore e non è $\emptyset$.

Osservazione 2.2.8. Una definizione equivalente per ordinali limite è la seguente: α è un ordinale limite se $\alpha \neq \emptyset$ e $\bigcup \alpha = \alpha$.

Esempio 2.2.9. Un primo esempio di ordinale limite è l'insieme dei numeri naturali $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$, che in questa veste, come ordinale, si indica con ω.

2.2.2 Numeri cardinali

Definizione 2.2.10. Due insiemi A e B sono *equipotenti* se esiste una biezione tra A e B.

Definizione 2.2.11. Dato un insieme A, la sua *cardinalità* è il piú piccolo ordinale α equipotente ad A.

Osservazione 2.2.12. Ovviamente, le cardinalità di insiemi sono ordinali che non sono equipotenti a nessun ordinale minore. Tali ordinali sono detti *numeri cardinali*.

Osservazione 2.2.13. I numeri naturali e ω sono numeri cardinali.

Lemma 2.2.14. *Valgono le seguenti proprietà:*

- *Per ogni ordinale α esiste un cardinale maggiore di α.*

- *Se X è un insieme di cardinali, allora* $\sup X$ *è un cardinale.*

Definizione 2.2.15. Per ogni ordinale α, definiamo α^+ il più piccolo cardinale maggiore di α, detto *cardinale successore* .

Definizione 2.2.16. Definiamo ora la funzione $\aleph : Ord \to Ord$:

- $\aleph_0 = \omega$,

- $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$,

- $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ se α ordinale limite.

I cardinali $\aleph_\alpha$ si dicono *cardinali successori* se α successore, *cardinali limite* se α limite.

D'ora in poi useremo la notazione ω_α per riferirci ad $\aleph_\alpha$ nella veste di ordinale. Chiaramente $\omega_0 = \omega$.
Abbiamo quindi gli strumenti necessari per introdurre l'ipotesi del Continuo.

Definizione 2.2.17 (CH)**.** (*Ipotesi del Continuo*) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

George Cantor avanzò quest'ipotesi nel 1878, e da quel momento, stabilire se fosse vera o meno divenne uno dei problemi principali della matematica. Nel 1900 David Hilbert inserì questo problema al primo posto della sua famosa lista di problemi aperti, i 23 Problemi di Hilbert, presentata al Congresso Matematico Internazionale di Parigi.
Soltanto quarant'anni dopo, Kurt Gödel dimostrò che l'ipotesi del Continuo non può essere dimostrata falsa all'interno della Teoria degli Insiemi, neppure assumendo l'assioma della scelta (AC).
Soltanto nel 1963, si arrivò la risposta definitiva al primo problema di Hilbert, dovuta a Paul Cohen. Egli dimostrò infatti che CH non può essere dimostrata vera in ZFC, utilizzando il Forcing.

Il risultato complessivo dei lavori di Gödel e Cohen è uno dei risultati più importanti della matematica dello scorso secolo, l*indipendenza* dell'ipotesi del Continuo da ZFC.

2.2.3 Reticoli

In questa sezione introdurremo la struttura di reticolo su un insieme parzialmente ordinato, e vedremo come si estende la nozione di filtro e ideale su reticoli. Vedremo infatti che per ogni insieme X, $\mathcal{P}(X)$ è un reticolo, e in particolare, un'algebra booleana (vedi §2.2.4).

Negli insiemi parzialmente ordinati sup e inf hanno il significato usuale, ovvero rispettivamente quello di minimo dei maggioranti e massimo dei minoranti.

Definizione 2.2.18. Un *reticolo* è un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$, dove ogni coppia di elementi ha sup (detto anche *join*), e inf (detto anche *meet*).

Nota. Un insieme parzialmente ordinato P si dice *join-semireticolo* se ogni coppia di elementi di P ha sup, oppure *meet-semireticolo* se ogni coppia di elementi ha inf. Un insieme parzialmente ordinato quindi è un reticolo se e solo se è un join-semireticolo e un meet-semireticolo.

D'ora in poi indicheremo i reticoli con la notazione $(L, \vee, \wedge)$, dove $\vee$, $\wedge$ corrispondono alle operazioni binare di sup e inf di coppie di elementi di L:

$$a \vee b = \sup\{a, b\},$$
$$a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Definizione 2.2.19. Un reticolo si dice *limitato* se ha un elemento massimo 1, e elemento minimo 0 che soddisfano la seguente relazione:

$$\forall p \in L \quad 0 \leq p \leq 1$$

I reticoli limitati si indicheranno con la notazione $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$.

Esempio 2.2.20. Un primo esempio di reticolo limitato si ha quando L è finito. Infatti per ogni reticolo L, è facile vedere, per induzione, che ogni sottoinsieme finito di L ha sup e inf.
Se L è finito, quindi, basterà prendere $1 := \sup L$ e $0 := \inf L$.

Definizione 2.2.21. Un reticolo si dice *distributivo* se le operazioni $\vee, \wedge$ sono distributive. In altre parole, un reticolo $(L, \vee, \wedge)$ è distributivo se per ogni $x, y, z \in L$ valge la seguente:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Nota. La precedente condizione per i reticoli distributivi è equivalente alla seguente:

$$\forall x, y, z \in L \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Definiamo ora le operazioni infinitarie su un reticolo L. Come abbiamo visto, sup e inf su sottoinsiemi finiti di un reticolo, sono sempre definiti. Definiamo la generalizzazione di queste operazioni per sottoinsiemi infiniti di L.
Sia $X \subseteq L$ infinito; le operazioni $\sup X$ e $\inf X$ si diranno *operazioni infinitarie*. Un reticolo in cui queste operazioni sono sempre definite si dice *completo*.
É chiaro che si può estendere la definizione di reticolo completo anche a join-semireticoli e meet-semireticoli, considerando solo le operazioni di sup e inf rispettivamente.

Nota. Un banale esempio di reticolo completo è quello dato nell'Esempio 2.2.20.

Definizione 2.2.22. Un reticolo distributivo limitato $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ si dice *con complemento* se per ogni elemento $x \in L$ esiste un elemento $y \in L$ tale che:

$$x \vee y = 1 \quad \text{e} \quad x \wedge y = 0.$$

In questo caso si dice che y è un *complemento* di x.
Un reticolo in cui ogni elemento ha esattamente un complemento si dice reticolo *con complemento unico*.

Esempio 2.2.23. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. L'insieme dei sottospazi $S(V)$ è un reticolo non distributivo con complemento non unico. Consideriamo l'ordine parziale $\leq$ su $S(V)$, dove $A \leq B$ se A è sottospazio vettoriale di B. Poiché l'intersezione di due sottospazi vettoriali è ancora un sottospazio vettoriale, $\inf\{A, B\} = A \cap B$, mentre $\sup\{A, B\} = \langle A \cup B \rangle$, che per definizione è il più piccolo spazio vettoriale che contiene $A \cup B$.
Il reticolo $S(V)$ è limitato da $0 := \{0_V\}$, e $1 = V$.
Il complemento di un elemento $A \in S(V)$, per la Definizione 2.2.22, è un sottospazio C di V tale che

$$A \cap C = \{0_V\} \quad \text{e} \quad \langle A \cup C \rangle = V. \tag{2.1}$$

Un tale C esiste, e se la dimensione di V è maggiore di 1, non è unico.
Se consideriamo ad esempio lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, e in (2.1), $A = \langle e_1 \rangle$, si vede che ci sono infiniti C che soddisfano (2.1), come $\langle e_2 \rangle$, $\langle e_1 + e_2 \rangle$, e così via.
Per la distributività, siano $A, B, C \in S(V)$. Se $S(V)$ fosse distributivo, per la Definizione 2.2.21, varrebbe

$$A \cap \langle B \cup C \rangle = \langle (A \cap B) \cup (A \cap C) \rangle. \tag{2.2}$$

Consideriamo l'esempio di prima con $V = \mathbb{R}^2$. Se in (2.2), prendiamo A, B, C generati da tre vettori di $\mathbb{R}^2$ a due a due indipendenti, allora banalmente

$$A \cap \langle B \cup C \rangle = A \cap V = A,$$

mentre $A \cap B = A \cap C = \{0_V\}$, da cui A, B, C non soddisfano (2.2).

Esempio 2.2.24. Sia X un insieme, e consideriamo l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$.

La relazione $\subseteq$ è un ordine parziale su $\mathcal{P}(X)$. Dati $U, V \in \mathcal{P}(X)$, $U \cap V = \inf(U, V)$, mentre $U \cup V = \sup(U, V)$. Infatti, $U \cap V$ è il più grande sottoinsieme di X che è contenuto sia in U che in V, mentre $U \cup V$ il più piccolo che li contiene entrambi. Il reticolo $\mathcal{P}(X)$ con le operazioni di intersezione e unione è inoltre distributivo e limitato e completo.
Infatti, dati $U, V, W \in \mathcal{P}(X)$, vale

$$U \cap (V \cup W) = (U \cap V) \cup (U \cap W),$$

é limitato da $0 := \emptyset$, e $1 := X$, ed è completo in quanto unioni e intersezioni di famiglie di sottoinsiemi di X, di qualunque cardinalità, sono ancora sottoinsiemi di X.

Definizione 2.2.25. Sia L un reticolo. Un *filtro* su L è un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di L, tale che:

0) $\mathcal{F} \neq L$,

1) se $u, v \in \mathcal{F}$, allora $\inf\{u, v\} \in \mathcal{F}$,

2) se $u, v \in L$, con $u \in \mathcal{F}$ e $u \leq v$, allora $v \in \mathcal{F}$.

Definizione 2.2.26. Un *ideale* su L è un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di L, tale che:

0) $\mathcal{I} \neq L$,

1) se $u, v \in \mathcal{I}$, allora $\sup\{u, v\} \in \mathcal{I}$,

2) se $u, v \in L$, con $u \in \mathcal{I}$ e $v \leq u$, allora $v \in \mathcal{I}$.

Osservazione 2.2.27. Utilizzando la definizione, si può vedere che filtri e ideali possono essere definiti rispettivamente in meet-semireticoli e in join-semireticoli. Nel caso in cui, invece, L sia un reticolo limitato (meet-semireticolo con 0, oppure join-semireticolo con 1), si può sostituire la condizione 0) con la condizione equivalente $0 \notin \mathcal{F}$, o $1 \notin \mathcal{I}$, rispettivamente.

Nota. Alla luce dell'Esempio 2.2.24, si vede facilmente, confrontando le rispettive definizioni, che filtri e ideali su reticoli sono delle generalizzazioni dei concetti introdotti in §2.1, nel caso in cui il L sia il reticolo delle parti di un insieme X.

2.2.4 Algebre Booleane

Definizione 2.2.28. Un *algebra booleana* è un reticolo distributivo con complemento unico.

In seguito, per le algebre booleane, indicheremo le operazioni di sup e inf con i simboli $+, \cdot$. Osserviamo che l'operazione di complementazione è ben definita su un reticolo con complemento unico; indicheremo quindi l'operazione di complementazione con il simbolo $-$. Per le algebre booleane useremo dunque la notazione $(L, -, +, \cdot, 0, 1)$, dove $+, \cdot$ sono operazioni binarie e $-$ è un operazione unaria.

Osservazione 2.2.29. Per le algebre booleane valgono le seguenti proprietà:

· $u + 0 = u$; $\quad u \cdot 0 = 0$; $\quad u + 1 = 1$; $\quad u \cdot 1 = u$;

· (Leggi di De Morgan) $\quad -(u + v) = -u \cdot -v$; $\quad -(u \cdot v) = -u + -v$.

Esempio 2.2.30. Un primo esempio di algebra booleana si ha considerando l'insieme $\{\mathrm{v}, \mathrm{f}\}$ dei valori di verità, con le operazioni logiche $\neg, \wedge, \vee$, corrispondenti rispettivamente alle operazioni booleane $-, \cdot, +$. Chiaramente si ha

$$(\{\mathrm{v}, \mathrm{f}\}, \neg, \wedge, \vee) \simeq B_{\{0,1\}}.$$

Dove $B_{\{0,1\}}$ denota l'algebra banale.

Esempio 2.2.31. Riprendendo l'Esempio 2.2.24, possiamo vedere che $\mathcal{P}(X)$ è anche un'algebra booleana.
Dobbiamo quindi vedere che $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X)$ ha complemento unico. Ci basta considerare come operazione di complementazione la mappa complementare $-^c : A \mapsto X \setminus A$. Ovviamente ogni insieme ha complemento unico in $\mathcal{P}(X)$, quindi $\mathcal{P}(X)$ è un algebra booleana.

Esempio 2.2.32. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del prim'ordine, e sia S l'insieme di tutte le proposizioni di $\mathcal{L}$. Consideriamo la relazione di equivalenza su S

$$\varphi \sim \psi \ \text{ se e solo se } \ \vdash \varphi \longleftrightarrow \psi.$$

L'insieme B di tutte le classi di equivalenza $[\varphi]_\sim$ è un algebra booleana con le seguenti operazioni:

$$0 = [\varphi \wedge \neg\varphi] \qquad 1 = [\varphi \vee \neg\varphi] \qquad -[\varphi] = [\neg\varphi]$$

$$[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi] \qquad [\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$

Quest'algebra è detta algebra di *Lindenbaum-Tarski*.

D'ora in poi, per le algebre booleane, useremo la notazione $u - v$ per indicare l'operazione $u \cdot (-v)$.

Definizione 2.2.33. Due elementi di un algebra booleana u, v si dicono *disgiunti* se $u \cdot v = 0$.

Per le algebre booleane, consideriamo la relazione d'ordine della quale siamo partiti per costruire la struttura di algebra di Boole. Le operazioni di join e meet ($+$, $\cdot$ rispettivamente) del reticolo sono monotone rispetto all'ordine; ovvero se abbiamo $u_1 \leq u_2$, e $v_1 \leq v_2$ in un algebra booleana B, allora si ha:

$$u_1 + v_1 \leq u_2 + v_2,$$
$$u_1 \cdot v_1 \leq u_2 \cdot v_2.$$

Osservazione 2.2.34. Possiamo introdurre una relazione d'ordine su un'algebra booleana B anche a posteriori, a partire dalle operazioni di algebra, dicendo che $u \leq^* v$ se $u - v = 0$.
Si può vedere che la relazione $\leq^*$ su B coincide con l'ordine parziale $\leq$.

Definizione 2.2.35. Un sottoinsieme A di un'algebra booleana B è una *sottoalgebra* se contiene $0, 1$, ed è chiusa sotto le operazioni booleane.

Definizione 2.2.36. Siano A, B due algebre booleane, una mappa $h : A \to B$ è un omomorfismo se preserva le operazioni:

- $h(0) = 0, \qquad h(1) = 1, \qquad h(-u) = -h(u)$
- $h(u + v) = h(u) + h(v), \qquad h(u \cdot v) = h(u) \cdot h(v).$

Osservazione 2.2.37. Si estendono in modo naturale anche le definizioni di ultrafiltro e ideale duale di un filtro viste in §2.1. Abbiamo quindi, dato $\mathcal{F}$ filtro su B, che l'ideale duale di $\mathcal{F}$ è dato da

$$\mathcal{F}^* = \{-u : u \in \mathcal{F}\}.$$

Mentre per la definizione di ultrafiltro, si ha che $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro se è massimale per l'inclusione nella classe dei filtri su B. Inoltre vale la stessa proprietà carattizzante, cioé $\mathcal{F}$ è ultrafiltro se e solo se per ogni $u \in B$, si ha $u \in \mathcal{F}$ oppure $-u \in \mathcal{F}$.

Definizione 2.2.38. Un ideale $\mathcal{I}$ su un algebra booleana B si dice *ideale primo* se per ogni $u \in B$, $u \in \mathcal{I}$ oppure $-u \in \mathcal{I}$.

Osservazione 2.2.39. Il duale di un ideale primo è un ultrafiltro.

2.2.5 Forcing

Il metodo del forcing fu introdotto da Paul Cohen nella dimostrazione dell'independenza di CH (Ipotesi del continuo) e AC (Assioma della scelta) da ZFC. Nella tesi faremo uso soltanto di alcune definizioni e concetti basilari del metodo del Forcing come i filtri generici e le anticatene. Inoltre useremo uno degli "Assiomi di Forcing", l'Assioma di Martin (MA).

Definizione 2.2.40. Sia M un modello transitivo per ZFC. Un insieme parzialmente ordinato, non vuoto $(P, <)$ in M si dice *forcing*, e gli elementi di P si dicono *condizioni di forcing*. Date due condizioni di forcing $p, q \in P$, diciamo che p è *più forte* di q se $p < q$.

Definizione 2.2.41. Due condizioni p e q si dicono *compatibili* se esiste $r \in P$ tale che $r \leq p$ e $r \leq q$. Altrimenti si dicono *incompatibili*.

Definizione 2.2.42. Un insieme $A \subseteq P$ si dice *anticatena* se i suoi elementi sono a coppie incompatibili.

Definizione 2.2.43. Un insieme $D \subseteq P$ si dice *denso* in P se per ogni $p \in P$ esiste $d \in D$ con $d \leq p$.

Definizione 2.2.44. Un insieme $F \subset P$ si dice *filtro* su P se:

- F è non vuoto,
- se $p \in F$ e $p \leq q$, allora $q \in F$,
- se $p, q \in F$, allora esiste $r \in F$ tale che $r \leq p$ e $r \leq q$.

Definizione 2.2.45. Un insieme $G \subset P$ si dice *generico* su M se:

- G è un filtro su P,
- se D appartiene al modello M ed è denso in P, allora $G \cap D \neq \emptyset$.

Definizione 2.2.46. Sia $\mathcal{D}$ una famiglia di insiemi. Allora un filtro G su P si dice $\mathcal{D}$-generico se $G \cap D \neq \emptyset$, per ogni sottoinsieme denso D di P che sta in $\mathcal{D}$.

Definizione 2.2.47. Un insieme parzialmente ordinato $(P, <)$ soddisfa la *c.c.c.* (*countable chain condition*) se ogni anticatena di P è numerabile.

Definizione 2.2.48 (MA)**.** (*Assioma di Martin*) Se $(P, <)$ è un insieme parzialmente ordinato che soddisfa la c.c.c. e $\mathcal{D}$ è una collezione di meno di $2^{\aleph_0}$ sottoinsiemi densi di P, allora esiste un filtro $\mathcal{D}$-generico su P.

2.3 Topologia

2.3.1 Definizioni generali

Definizione 2.3.1. Uno spazio topologico X è *compatto* se da ogni ricoprimento di aperti è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

Lemma 2.3.2. *Uno spazio topologico (X, τ) è compatto se e solo se per ogni collezione $\{A_i : i \in I\}$ di sottoinsiemi chiusi di X, si ha:*

$$\left(\forall J \subseteq I \textit{ finito} : \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \emptyset\right) \implies \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset \tag{2.3}$$

Teorema 2.3.3 (Tichonov)**.** *Sia $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. Allora X è compatto se e solo se per ogni $\alpha \in I$, X_α è compatto.*

Definizione 2.3.4. Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X si dice *denso* se $\overline{D} = X$. Equivalentemente, D è denso in X se ogni aperto di X interseca D. Se X ha sottoinsieme denso numerabile si dice *separabile*.

Esempio 2.3.5. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con la topologia usuale è uno spazio separabile. Infatti, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ed è numerabile.

Definizione 2.3.6. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una famiglia di intorni di un punto $x \in X$

$$\mathcal{N}_x = \{B_i \subseteq X : \exists A \in \tau \ : x \in A \subseteq B_i,\ i \in I\}$$

si dice *sistema fondamentale di intorni di x* se per ogni $U \subseteq X$ intorno di x, esiste $V \in \mathcal{N}_x$ tale che $x \in V \subseteq U$.

Definizione 2.3.7. Uno spazio topologico (X, τ) è detto *primo-numerabile* (*first countable*) se ogni suo punto ammette una base di intorni numerabile, cioé se $\forall x \in X$ esiste $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$, dove $\mathcal{V}(x)$ è il filtro degli intorni di x, tale che:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x)\, \exists B \in \mathcal{B}(x) \text{ con } B \subseteq V.$$

Definizione 2.3.8. Una *base* per uno spazio topologico (X, τ) è una famiglia di aperti $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tale che ogni aperto della topologia si può scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$.
Equivalentemente, $\mathcal{B}$ è una base se per ogni $x \in X$, e per ogni $U \in \tau$, esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq U$.

Lemma 2.3.9. *Una famiglia di sottoinsiemi non vuoti $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ di X è una base per uno spazio topologico X se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

1) $\bigcup_{i\in I} B_i = X$,

2) $\forall B, B' \in \mathcal{B}$, $\forall x \in X$, *con* $x \in B \cap B'$, $\exists B'' \in \mathcal{B}$ *tale che* $x \in B'' \subseteq B \cap B'$.

Definizione 2.3.10. Dato uno spazio topologico X, si definisce il *peso* di X ($w(X)$) come la minima cardinalità di una base per la topologia di X.
Lo spazio X si dice *second countable* se $w(X) \leq \aleph_0$.

Definizione 2.3.11. Una famiglia $\mathcal{N}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X si dice *rete di insiemi* (*network*) se per ogni aperto U di X, e per ogni $x \in U$ esiste $N \in \mathcal{N}$ con $x \in N \subseteq U$.

Definizione 2.3.12. Si definisce il *peso di rete* (*network weight*) di uno spazio topologico $nw(X) := \min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ è una rete per } X\}$.

Osservazione 2.3.13. 1) Ogni base è una rete di insiemi.
Infatti, sia $\mathcal{B}$ una base per la topologia τ di X. Allora $\forall x \in X, \forall U \in \tau$ cui x appartiene, esiste $B \in \mathcal{B}$, con $x \in B \subseteq U$. Quindi $\mathcal{B}$ soddisfa la Definizione 2.3.11, ovvero è una rete di insiemi.

2) Ogni rete di insiemi aperti è una base.
   Infatti, prendendo $\mathcal{N}$ rete di aperti, per la Definizione 2.3.11, ogni aperto della topologia si può scrivere come unione di aperti di $\mathcal{N}$, perciò $\mathcal{N}$ soddisfa la Definizione 2.3.8.

Abbiamo quindi stabilito che un insieme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una base se e solo se è una rete di insiemi aperti.

Esempio 2.3.14. Vediamo ora un esempio di network di insiemi non aperti. Dato uno spazio topologico X, l'insieme $S = \{\{x\} : x \in X\}$ è una rete. Infatti, per ogni $x \in X$, e per ogni aperto U che contiene x, esiste $N = \{x\} \in S$, con $x \in \{x\} \subseteq U$. Possiamo quindi maggiorare $nw(X)$ con la cardinalità di X.

Alla luce di quanto visto nell'Osservazione 2.3.13, possiamo dire qualcosa di più a proposito del peso di rete di uno spazio X. Infatti, l'Osservazione ci dice che per uno spazio topologico, il peso è sempre maggiore o uguale del peso di rete, mentre l'Esempio 2.3.14 ci dice che il peso di rete è minore o uguale alla cardinalità dello spazio.
Si ha quindi che $nw(X) \leq \min\{w(X), |X|\}$.
Nel Teorema 2.3.15, vedremo che per gli spazi compatti, peso e peso di rete coincidono.

Teorema 2.3.15. *Sia X uno spazio topologico compatto. Allora $w(X) = nw(X)$.*

Lemma 2.3.16. *Sia X uno spazio regolare. Allora $w(X) \leq 2^{d(X)}$.*

Teorema 2.3.17 (Tichonov)**.** *Sia X uno spazio Tychonov, e $\mathcal{B}$ una base per X di cardinalità k. Allora X è omeomorfo ad un sottospazio del cubo di Tichonov $[0,1]^k$.*

Lemma 2.3.18. *Il prodotto di γ spazi di Hausdorff separabili, con $\gamma \leq \mathfrak{c}$, è separabile.*

Lemma 2.3.19. *Sia X uno spazio topologico, Y uno spazio topologico compatto. Se esiste una suriezione continua da X in Y, allora $w(Y) \leq w(X)$.*

Dimostrazione. Sia $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una funzione continua e suriettiva, e sia $\mathcal{B}_X$ una base per X di cardinalità $w(X)$. Sia $\mathcal{M} = \{f(B) : B \in \mathcal{B}_X\}$.
Affermo che $\mathcal{M}$ è una rete per Y.

Poiché $\mathcal{B}_X$ è una base per X, vale

$$\forall x \in X,\ \forall U \in \tau_X,\ \exists B \in \mathcal{B}_X \ \text{ tale che } \ x \in B \subseteq U. \tag{2.4}$$

Ora, per la suriettività di f, ogni $y \in Y$ è immagine di qualche $x \in X$, mentre per la continuità di f, ogni aperto di τ_Y ha retroimmagine tramite f aperta in X. Da (2.4), segue quindi

$$\forall y \in Y,\ \forall V \in \tau_Y,\ \exists M \in \mathcal{M} \ \text{ tale che } \ y \in M \subseteq V, \tag{2.5}$$

dove (2.5) è esattamente la definizione di rete per $\mathcal{M}$ (Def. 2.3.11).
Poiché per il Teorema 2.3.15, vale $nw(Y) = w(Y)$ si ha

$$w(Y) = nw(Y) \leq w(X),$$

che conclude la dimostrazione. $\square$

Definizione 2.3.20. Uno spazio topologico X si dice *omogeneo* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un omeomorfismo $h : X \to X$ tale che $h(x) = y$.

Esempio 2.3.21. L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, con la topologia discreta è uno spazio omogeneo. Poiché lo spazio topologico $(\mathbb{N}, \tau_d)$ è discreto, ogni permutazione di $\mathbb{N}$ è un omeomorfismo, quindi soddisfa la Definizione 2.3.20.

Definizione 2.3.22. Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme di X si dice:

· G_δ*-insieme* se è intersezione di una famiglia numerabile di aperti,

· F_σ*-insieme* se è unione di una famiglia numerabile di chiusi.

2.3.2 Assiomi di separazione

Definizione 2.3.23. Uno spazio topologico (X, τ) si dice:

- T_1 se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$, esistono $U, V \in \tau$ tali che:
$$(x \in U \wedge y \notin U) \wedge (x \notin V \wedge y \in V);$$
- T_2 (di Hausdorff) se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$, esistono $U, V \in \tau$ disgiunti tali che:
$$x \in U \wedge y \in V;$$
- *regolare* se per ogni punto $x \in X$, e per ogni chiuso F, con $x \notin F$, esistono due aperti disgiunti U, V tali che $x \in U$, $F \subseteq V$;
- *normale* se per ogni coppia di chiusi disgiunti F, G di X, esistono due aperti disgiunti U, V tali che $F \subseteq U$, $G \subseteq V$;
- T_4 se è normale e T_1.

Lemma 2.3.24. *Se X è sottospazio di Y, e Y è T_1 (di Hausdorff), allora X è T_1 (di Hausdorff).*

Lemma 2.3.25. *Uno spazio compatto e T_2 è normale.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione inizieremo provando che uno spazio topologico compatto T_2 è regolare, e lo useremo per dimostrare che è anche normale.

Sia X uno spazio compatto e T_2. Sia $x \in X$, $F \subseteq X$ un chiuso a cui x non appartiene. Allora per ogni $y \in F$ abbiamo $x \neq y$, e quindi esistono due intorni aperti disgiunti U, V di x e y rispettivamente. F è compatto perché sottospazio chiuso di un compatto, quindi dal ricoprimento $F \subseteq \bigcup_{y \in F} V_y$ posso trovare $y_1, \dots, y_n \in F$ tali che $F \subseteq \bigcup_{i \leq n} V_{y_i} =: V$. Ma allora l'insieme $U := \bigcap_{i \leq n} U_{y_i}$ è un intorno di x e si ha $U \cap V = \emptyset$.

Siano ora $F, G \subseteq X$ chiusi disgiunti. Per la regolarità di X, per ogni $y \in G$ è possibile trovare due aperti disgiunti di F e y. Chiamiamo questi due intorni U_y e V_y. Sia quindi $\bigcup_{y \in G} V_y$ un ricoprimento di G. Possiamo trovare $y_1, \dots, y_n \in G$ tali che $G \subseteq \bigcup_{i \leq n} V_{y_i} =: V$. Ora, detto $U := \bigcap_{i \leq n} U_{y_i}$, abbiamo trovato due aperti disgiunti U e V che contengono F e G rispettivamente. $\square$

2.3.3 Connessione

Definizione 2.3.26. Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice *clopen* se è sia aperto che chiuso.

Definizione 2.3.27. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *connesso* se gli unici insiemi clopen sono $\emptyset$ e X.
Si dice *totalmente disconnesso* se gli unici insiemi connessi sono i singoletti.

Definizione 2.3.28. Uno spazio topologico (X, τ) è *zero-dimensionale* se ha una base di clopen.

Proposizione 2.3.29. *La proprietà di essere zero-dimensionale si preserva per sottospazi e prodotto di spazi topologici.*

Proposizione 2.3.30. *Ogni spazio di Hausdorff zero-dimensionale è totalmente disconnesso.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Hausdorff zero-dimensionale e sia $C \subseteq X$ un sottospazio connesso di X.
Per la Proposizione 2.3.29, C ha una base di clopen, ed è di Hausdorff per il Lemma 2.3.24. Poiché C è connesso, la base di clopen è formata da $\emptyset$ e C, da cui segue C può essere di Hausdorff solo se consiste di un solo punto.
Abbiamo stabilito quindi che gli unici sottospazi connessi di X sono i singoletti, ovvero X è totalmente disconnesso. $\square$

2.3.4 Compattificazioni

Definizione 2.3.31. Dato uno spazio topologico di Hausdorff (X, τ), una *compattificazione* di X è una coppia (ι, K), dove:

- ι è un omeomorfismo tra X e un sottospazio denso di K,
- K è uno spazio compatto.

Esempio 2.3.32. Sia (X, τ) uno spazio localmente compatto e T_2.
Si definisce $\alpha X := X \cup \{\infty\}$, e si dota questo spazio della topologia

$$\tau_\alpha := \tau \cup \{A \cup \{\infty\} \ : \ X \setminus A \ \text{ chiuso e compatto in } X\}$$

Lo spazio αX è un estensione compatta di X, e inoltre è di Hausdorff.
La compattificazione αX è nota come *compattificazione di Alexandroff*.

Definizione 2.3.33. Dato uno spazio di Hausdorff X, le compattificazioni di X formano un insieme (a meno di omeomorfismi) che si indica con $C(X)$. Su $C(X)$ è possibile definire una relazione di ordine parziale $\leq$:

$$(\iota, K) \leq (\iota', K') \text{ se esiste } g : K' \to K \text{ continua tale che } \iota = g \circ \iota' \tag{2.6}$$

Lemma 2.3.34. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Ogni insieme $C \subseteq C(X)$ ammette estremo superiore.*

Dimostrazione. Siano $\{(\iota_c, K_c) : c \in C\}$ gli elementi di C. Si consideri l'applicazione diagonale $f : X \to \prod_{c \in C} K_c$, dove $\prod_{c \in C} K_c$ è compatto per il Teorema 2.3.3, in quanto prodotto di spazi compatti.

L'applicazione diagonale f definisce una compattificazione $\iota : X \to \overline{f(X)} =: K$.
Per ogni $c \in C$ si ha $(\iota_c, K_c) \leq (\iota, K)$; infatti, se consideriamo la mappa $\pi_{c|K} : K \to K_c$, ovvero la restrizione della proiezione canonica $\pi_c : \prod_{d \in C} K_d \to K_c$, si ha

$$\iota_c = \pi_{c|K} \circ \iota, \text{ quindi } (\iota_c, K_c) \leq (\iota, K).$$

Ora, per vedere che la coppia (ι, K) è il minimo dei maggioranti di C, consideriamo una compattificazione (λ, L) tale che $(\iota_c, K_c) \leq (\lambda, L)$ per ogni $c \in C$.
Siano h_c funzioni che soddisfano (2.6), ovvero $\iota_c = h_c \circ \lambda$.
Sia $h : L \to \prod_{c \in C} K_c$ l'applicazione diagonale e $L' := h(L)$.
Poiché $\lambda(X)$ è denso in L, e $h(\lambda(X))$ è contenuto in $f(X)$, per la continuità di h si ha $h(L) \subseteq K$. Quindi $(\lambda, L) \geq (\iota, K)$, da cui segue che (ι, K) è l'estremo superiore di C. $\square$

Il precedente lemma ci permettere di dotare l'insieme $C(X)$ delle compattificazioni di uno spazio topologico di una struttura più ricca; $(C(X), \leq)$ è infatti un join-semireticolo completo con 1.
Infatti, utilizzando il Lemma 2.3.34 è possibile trovare, per ogni coppia di elementi di $C(X)$, il sup, e ponendo $C = C(X)$ si ottiene l'estremo superiore $1_{C(X)} := \sup C(X)$.

Definizione 2.3.35. Dato uno spazio di Haudorff X, si dice *compattificazione di Stone-Čech* lo spazio compatto $\beta X := \sup C(X)$.

Teorema 2.3.36. *Sia X uno spazio di Tychonov, e sia $f : X \to K$ una funzione continua con K compatto. Allora esiste un'unica estensione continua $\tilde{f} : \beta X \to K$ di f.*

Osservazione 2.3.37. Alla luce del precedente teorema possiamo dare una definizione equivalente della compattificazione di Stone-Čech:

Uno spazio topologico $\tilde{K} = \beta X$ se e solo se per ogni spazio compatto K e ogni mappa continua $f : X \to K$, esiste un'unica estensione $\tilde{f} : \tilde{K} \to K$ tale che $\tilde{f}|_X = f$

Capitolo 3

Lo spazio $\beta\omega$

3.1 Costruzione

In questo capitolo costruiremo esplicitamente lo spazio $\beta\omega$ partendo dall'insieme di tutti gli ultrafiltri su ω.

Definizione 3.1.1. Denotiamo con $\mathcal{X}$ l'insieme di tutti gli ultrafiltri su ω.

$$\mathcal{X} = \{U \subseteq \mathcal{P}(\omega) : U \text{ ultrafiltro su } \omega\} \tag{3.1}$$

Definizione 3.1.2. Sia $A \subseteq \omega$. Si chiama *insieme di base* l'insieme $W_A \subseteq \mathcal{X}$ di tutti gli ultrafiltri su ω che contengono A, ovvero:

$$W_A = \{p \in \mathcal{X} : A \in p\}.$$

In questa definizione A può anche essere vuoto, in tal caso, poiché i filtri non contengono $\emptyset$, si avrà banalmente $W_\emptyset = \emptyset$.

Definizione 3.1.3. Definiamo ora $\mathcal{B}$ come l'insieme di tutti gli insiemi di base di $\mathcal{X}$.

$$\mathcal{B} = \{W_A : A \subseteq \omega\}. \tag{3.2}$$

Le definizioni appena date sono giustificate dalla Proposizione 3.1.5, in cui si dimostrerà che $\mathcal{B}$ è effettivamente una base per la topologia di $\mathcal{X}$.

Lemma 3.1.4. *Per ogni $A, B \subseteq \omega$, valgono le seguenti proprietà:*

1) $W_A \cap W_B = W_{A\cap B}$,

2) $\mathcal{X} \setminus W_A = W_{\omega\setminus A}$,

3) $W_\omega = \mathcal{X}$.

Dimostrazione. Per 1) dobbiamo dimostrare che per ogni ultrafiltro $\mathcal{U} \in \mathcal{X}$,

$$\big(\mathcal{U} \in W_A \text{ e } \mathcal{U} \in W_B\big) \text{ se e solo se } \mathcal{U} \in W_{A\cap B}. \tag{3.3}$$

Per la definizione vale: $A \in \mathcal{U}$ se e solo se $\mathcal{U} \in W_A$. Quindi (3.3) è equivalente a

$$\big(A \in \mathcal{U} \text{ e } B \in \mathcal{U}\big) \text{ se e solo se } A \cap B \in \mathcal{U}, \tag{3.4}$$

che è vero perché $\mathcal{U}$ è un filtro.

Per 2) dobbiamo dimostrare che per ogni ultrafiltro $\mathcal{U} \in \mathcal{X}$,

$$\mathcal{U} \notin W_A \iff \mathcal{U} \in W_{\omega \setminus A}, \tag{3.5}$$

che è equivalente a $A \notin \mathcal{U} \iff (\omega \setminus A) \in \mathcal{U}$, e questo è vero perché $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro.

3) è banale. $\square$

Proposizione 3.1.5. *$\mathcal{B}$ è una base di topologia per $\mathcal{X}$.*

Dimostrazione. Che $\bigcup \mathcal{B} = \mathcal{X}$ è banale per la definizione di $\mathcal{B}$. Per 2), siano $B, B' \in \mathcal{B}$. Allora $B = W_A$, $B' = W_{A'}$, per qualche A, A' sottoinsiemi di ω. Poiché gli ultrafiltri sono chiusi per intersezioni e sovrainsiemi,

$$B \cap B' = W_A \cap W_{A'} = W_{A \cap A'} =: B'',$$

per quanto dimostrato nel lemma precedente. Quindi, per il Lemma 2.3.9, $\mathcal{B}$ è una base di topologia per $\mathcal{X}$. $\square$

Lemma 3.1.6. *Per ogni sottoinsieme A di ω, l'insieme di base $W_A \subseteq \mathcal{X}$ è un clopen di $\mathcal{X}$.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \omega$. L'insieme W_A è aperto per definizione, inoltre W_A è anche chiuso perché ha complementare aperto:

$$\mathcal{X} \setminus W_A = W_{\omega \setminus A} \in \mathcal{B}.$$

$\square$

Per quanto abbiamo appena visto lo spazio $\mathcal{X}$ è zero-dimensionale in quanto la base $\mathcal{B}$, per il Lemma 3.1.6 è una base di clopen. Inoltre è totalmente disconnesso per la Proposizione 2.3.30.

3.2 Compattezza

Teorema 3.2.1. *$\mathcal{X}$ è compatto.*

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che non sia compatto. Allora esiste un ricoprimento aperto di $\mathcal{X}$ che non ammette sottoricoprimenti finiti. Possiamo assumere che il ricoprimento abbia la forma $\{W_{A_\alpha} : \alpha \in I\}$, ovvero sia costituito da elementi della base.

Per ogni sottoinsieme finito J di I si avrà quindi

$$\mathcal{X} \neq \bigcup_{\alpha_j \in J} W_{A_{\alpha_j}}. \tag{3.6}$$

Si noti ora che l'equazione (3.6), passando ai complementari, è equivalente alla seguente

$$\emptyset \neq \bigcap_{\alpha_j \in J} (W_{A_{\alpha_j}})^c = \bigcap_{\alpha_j \in J} W_{A^c_{\alpha_j}} = W_{\bigcap_{\alpha_j \in J} A^c_{\alpha_j}}, \tag{3.7}$$

dove le uguaglianze seguono dal Lemma 3.1.4.
Segue dalla Definizione 3.1.2 che $W_B = \emptyset$ se e solo se $B = \emptyset$, quindi si ha che ogni insieme finito di complementari di A_α ha intersezione non vuota, ovvero la famiglia $\{A_\alpha^c : \alpha \in I\}$ ha la P.I.F.
Per il Lemma 2.1.5 e per il Teorema dell'Ultrafiltro (2.1.14), esiste un ultrafiltro $p \in \beta\omega$ che estende $\{A_\alpha^c : \alpha \in I\}$. Poiché per ipotesi $\{W_{A_\alpha} : \alpha \in I\}$ è un ricoprimento per $\mathcal{X}$, esiste $\beta \in I$ tale che $p \in W_{A_\beta}$. Ma per quanto abbiamo appena visto $A_\beta^c \in p$, che è assurdo perché p è un filtro. $\square$

3.3 Separabilità

Teorema 3.3.1. *$\mathcal{X}$ ha un sottoinsieme denso omeomorfo a ω.*

Dimostrazione. Sia $\iota : \omega \to \mathcal{X}$ definita come segue:

$$\forall n \in \omega \quad n \mapsto \iota(n) = [\{n\}]$$

ι manda n nell' ultrafiltro principale generato $\{n\}$ (Osservazione 2.1.16).
Dobbiamo dimostrare che ι è iniettiva e continua in entrambe le direzioni.

Ovviamente, ι è iniettiva. Infatti, se $n \neq m$, non esistono ultrafiltri principali che contengono sia $\{n\}$ che $\{m\}$, in quanto disgiunti (Proposizione 2.1.17).
Inoltre, ι è anche continua in quanto ω è equipaggiato con la topologia discreta.
Per provare la continuità della funzione inversa, è sufficiente dimostrare che ι è *aperta*, ovvero manda aperti in aperti.
Poichè la topologia di ω è $\mathcal{P}(\omega)$, ci basta dimostrare che le immagini dei singoletti di ω sono aperti in $\mathcal{X}$, ovvero che $\{\iota(n)\}$ è aperto in $\mathcal{X}$ per ogni $n \in \omega$.

$$\{\iota(n)\} = \{p \in \mathcal{X} : \{n\} \in p\} = W_{\{n\}} \in \mathcal{B}$$

quindi $\{\iota(n)\}$ è un aperto di base, e $\iota[\omega]$ è una copia omeomorfa dello spazio discreto ω.

Ora dimostriamo che $\iota[\omega]$ è denso in $\mathcal{X}$.
Sia $W_A \in \mathcal{B}$ un aperto di base non vuoto. Allora $A \neq \emptyset$, e prendiamo $n \in A$.
Per definizione, $\{n\} \in \iota(n)$, quindi $\{n\} \subseteq A \in \iota(n)$, da cui segue $\iota(n) \in W_A$.
Vale infatti:

$$W_A \cap \iota[\omega] = \{\iota(n) : n \in A\} = \iota[A]$$

e dal fatto che $W_A \in \mathcal{B}$, e che $\mathcal{B}$ è una base di aperti, si ha la tesi. $\square$

Proposizione 3.3.2. *Lo spazio $\mathcal{X}$ è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $p, q \in \mathcal{X}$ distinti. Vogliamo dimostrare che esistono due intorni di base disgiunti che li separano. Poiché $p \neq q$, possiamo dire che esiste $A \subseteq \omega$ tale che:

$$A \in p \quad \text{e} \quad A \notin q$$

che è equivalente a dire:

$$p \in W_A \quad \text{e} \quad q \in \mathcal{X} \setminus W_A = W_{\omega \setminus A}$$

Quindi p e q sono separati da due aperti di base disgunti W_A e $W_{\omega\setminus A}$, da cui la tesi. $\square$

Osservazione 3.3.3. $\mathcal{X}$ è T_4. Infatti, per il Lemma 2.3.25, ogni spazio compatto di Hausdorff è normale, e quindi T_4.

3.4 $\mathcal{X}$ è la compattificazione di Stone-Čech di ω

Teorema 3.4.1. *$\mathcal{X}$ è la compattificazione di Stone-Čech di ω.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{X}$ soddisfa la proprietà dell'Osservazione 2.3.37. Sia Y uno spazio compatto T_2, e sia $f : \omega \to Y$ una funzione. Definiremo una funzione continua $\tilde{f} : \mathcal{X} \to Y$ che estende f. Se una tale funzione esiste, allora è univocamente determinata da f in quanto il dominio di f, ω è un sottoinsieme denso di $\mathcal{X}$.

Per ogni ultrafiltro $p \in \mathcal{X}$ consideriamo:

$$\bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y} \tag{3.8}$$

dove $f[A]$ è l'immagine di A tramite f, e $\overline{f[A]}^{Y}$ la sua chiusura in Y. Mostriamo che per l'insieme definito da (3.8) vale:

$$\forall p \in \mathcal{X} \ : \ \left| \bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y} \right| = 1 \tag{3.9}$$

Dopodiche possiamo definire $\tilde{f}(p)$ come l'unico elemento di $\bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y}$.

$\bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y}$ non è vuoto. Infatti, poichè Y è compatto, per il Lemma 3.1.6, ogni collezione di chiusi con la P.I.F. ha intersezione non vuota.
L'insieme $\{A : A \in p\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ ha la P.I.F poichè p è un filtro, quindi questo è vero anche per $\{f[A] : A \in p\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$.
Poiché $f[A] \subseteq \overline{f[A]}^{Y}$, anche $\{\overline{f[A]}^{Y} : A \in p\}$ ha la P.I.F., quindi:

$$\bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y} \neq \emptyset.$$

D'altra parte, $\bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y}$ non può avere più di un elemento, perché Y è T_2.
Dimostriamo innanzitutto la seguente proprietà:

Lemma 3.4.2. *Sia $p \in \mathcal{X}$, $y \in Y$, e sia $\mathcal{V}(y)$ il filtro degli intorni di y. Allora:*

$$y \in \bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y} \iff \forall U \in \mathcal{V}(y) \ \ f^{-1}[U] \in p \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Si noti che:

$$y \in \bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y} \iff \forall A \in p \ \ \forall U \in \mathcal{V}(y) \ \ U \cap f[A] \neq \emptyset \tag{3.11}$$

($\to$) Sia $y \in \bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y}$ e $U \in \mathcal{V}(y)$. Se $f^{-1}[U]$ non sta in p, allora $\omega \setminus f^{-1}[U] \in p$ perchè p ultrafiltro; ma questo, per (3.11) implica:

$$U \cap f[\omega \setminus f^{-1}[U]] \neq \emptyset$$

che è impossibile.

($\leftarrow$) Assumiamo ora $y \notin \bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}^{Y}$. Per (3.11) possiamo scegliere $U \in \mathcal{V}(y)$ in modo da avere un $A \in p$ con $U \cap f[A] = \emptyset$.
Segue che $f^{-1}[U] \cap A = \emptyset$, quindi $f^{-1}[U]$ non può stare in p dato che $A \in p$. $\square$

Utilizzando il precedente lemma, possiamo dimostrare che $\bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}^Y$ non può contenere due punti distinti di Y.
Siano y_1, y_2 due punti distinti in $\bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}^Y$; poichè Y è T_2, possiamo trovare due intorni U_1, U_2 di y_1, y_2 rispettivamente, disgiunti.
Usando quanto appena dimostrato, si ha sia $f^{-1}[U_1] \in p$, che $f^{-1}[U_2] \in p$, che è impossibile in quanto $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ implica $f^{-1}[U_1] \cap f^{-1}[U_2] = \emptyset$.

Ora possiamo definire la funzione $\tilde{f} : \mathcal{X} \to Y$ nel seguente modo:

$$\forall p \in \mathcal{X} : \quad p \mapsto \tilde{f}(p) \in \bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}^Y \tag{3.12}$$

Resta quindi da dimostrare che $\tilde{f}$ è continua e che coincide con f su $\omega \subseteq \mathcal{X}$.

1) $\tilde{f}|_\omega = f$. Dato $n \in \omega \subseteq \mathcal{X}$, (ovvero l'ultrafiltro principale $[\{n\}]$), si ha

$$\tilde{f}(n) \in \bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}^Y \subseteq \overline{f[\{n\}]}^Y = \overline{\{f(n)\}}^Y = \{f(n)\}$$

poiché $\{n\} \in p$ e i singoletti sono chiusi negli spazi Hausdorff.
Quindi $\tilde{f}(n) = f(n)$ per ogni $n \in \omega$.

2) $\tilde{f}$ è continua. Per dimostrarlo, ricordiamo che una funzione $g : X \to Y$ è continua se e solo se $\forall x \in X\ \forall V \in \mathcal{V}(g(x))\ \exists U \in \mathcal{V}(x)$ tale che $g[U] \subseteq V$.
Ricordiamo inoltre che uno spazio Y compatto e T_2 è regolare (Lemma 2.3.25).
Come conseguenza, per ogni intorno V di $y \in Y$, esiste un intorno chiuso V' di y tale che $V' \subseteq V$. Sia quindi $p \in \mathcal{X}$, e sia $V \in \mathcal{V}(\tilde{f}(p))$ un intorno di $\tilde{f}(y) \in Y$. Poiché Y è regolare, possiamo scegliere un intorno chiuso $V' \in \mathcal{V}(\tilde{f}(p))$ contenuto in V. Per il Lemma 3.4.2, $A_0 = f^{-1}[V'] \subseteq \omega$ sta in p. Quindi il corrispondente clopen di base W_{A_0} è un intorno di p.
Resta da dimostrare che per ogni $q \in W_{A_0}$, $\tilde{f}(q) \in V'$.

$$\tilde{f}(q) \in \bigcap_{A\in q} \overline{f[A]}^Y \subseteq f[A_0] = f[f^{-1}[V']] \subseteq V',$$

che conclude la dimostrazione.

□

3.5 $\beta\omega$ non è metrizzabile

Definizione 3.5.1. Uno spazio topologico X è *metrizzabile* se esiste una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ (*metrica*) tale che, $\forall x, y, z \in X$ vale:

1) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$,

2) $d(x, y) = d(y, x)$,

3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Definizione 3.5.2. Una successione (x_n) in uno spazio topologico X *converge* ad un punto $x \in X$ se ogni intorno U di x contiene tutta la successione, eccetto un numero finito di elementi.

Teorema 3.5.3. *$\beta\omega$ non è metrizzabile.*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq \omega$ una successione strettamente monotona di numeri naturali e indichiamo con $(y_n)_{n\in\omega} = (\iota(x_n))_{n\in\omega}$ la sua immagine in $\iota[\omega]$. Poiché $\beta\omega$ è compatto (Teorema 3.2.1), se fosse metrizzabile, sarebbe sequenzialmente compatto. Vediamo quindi che la successione (y_n) non ammette estratte convergenti in $\beta\omega$.
Poiché (x_n) è strettamente monotona, non ammette estratte convergenti in ω, perciò lo stesso vale per (y_n) in $\iota(\omega)$. Senza perdita di generalità, vediamo che (y_n) non converge.
Se (y_n) converge, allora deve necessariamente convergere ad un punto $p \in \beta\omega \setminus \iota(\omega)$. Consideriamo un intorno di p nella forma W_A, con $A \in p$. Se (y_n) converge a p, allora per la Definizione 3.5.2, W_A contiene tutta la successione eccetto un numero finito di elementi, ovvero

$$\exists m \geq 0 \ \text{ tale che } \ \forall n \geq m \ \ y_n \in W_A, \tag{3.13}$$

che è equivalente a dire

$$\exists m \geq 0 \ \text{ tale che } \ \forall n \geq m \ \ x_n \in A. \tag{3.14}$$

Se (y_n) converge a p, (3.14) deve valere per ogni $A \in p$.

Vediamo che questo non può succedere.
Consideriamo i seguenti insiemi, $S := \{x_{2n} : n \in \omega\}$ e $\omega \setminus S = S^c$. Chiaramente, sia S che S^c sono infiniti. Poiché p è un ultrafiltro, si ha $S \in p$, oppure $S^c \in p$. Se $S \in p$, consideriamo l'intorno W_S di p; poiché per ogni $n \in \omega$, $x_{2n+1} \notin S$, si ha che y_n non converge a p. Analogamente per il caso $S^c \in p$. Avendo supposto solo la monotonia della successione, si ha che nessuna successione strettamente crescente può convergere in $\beta\omega$, quindi $\beta\omega$ non è sequenzialmente compatto e di conseguenza non metrizzabile. □

3.6 Invarianti cardinali di $\beta\omega$

Definizione 3.6.1. Una famiglia $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice *indipendente* se per ogni $n+m$-upla $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \in A$ distinti, si ha

$$|X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap (X \setminus Y_1) \cap \ldots \cap (X \setminus Y_m)| = \aleph_0.$$

Lemma 3.6.2. *Esiste $A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ indipendente con $|A| = 2^{\aleph_0}$.*

Dimostrazione. Sia

$$P = \left\{(S,T) : S \in [\omega]^{<\omega}, T \in \left[[\omega]^{<\omega}\right]^{<\omega}\right\}. \tag{3.15}$$

$[\omega]^{<\omega}$, ovvero l'insieme dei sottoinsiemi finiti di ω, è numerabile, di conseguenza lo è anche $\left[[\omega]^{<\omega}\right]^{<\omega}$. Quindi si ha

$$|P| = \left|[\omega]^{<\omega} \times \left[[\omega]^{<\omega}\right]^{<\omega}\right| = |\aleph_0 \times \aleph_0| = \aleph_0.$$

Costruiamo ora $A \subseteq \mathcal{P}(P)$; per ogni sottinsieme u di ω, sia $X_u = \{(S,T) \in P : S \cap u \in T\}$.
Sia quindi $A = \{X_u : u \subseteq \omega\}$. Vogliamo dimostrare che:

1) $|A| = 2^{\aleph_0}$,

2) A è indipendente.

1) Ad elementi diversi di $\mathcal{P}(\omega)$ corrispondono elementi diversi di A. Infatti se u e v sono due sottoinsiemi distinti di ω esiste, a meno di scambiare u con v, un elemento x che sta in u ma non in v. Allora la coppia (S_x, T_x) con $S_x = \{x\}$ e $T_x = \{S_x\}$ é tale che $(S_x, T_x) \in X_u$ (perché $S_x \cap u = \{x\} = S_x \in T_x$, ma $(S_x, T_x) \notin X_v$). Quindi $|A| \geq |2^{\aleph_0}|$, e poiché $A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, vale necessariamente $|A| = 2^{\aleph_0}$.

2) A è indipendente se per ogni $n+m$-upla $X_{u_1}, \dots, X_{u_n}, X_{v_1}, \dots, X_{v_m} \in A$ distinti, si ha

$$|\bigcap_{i \leq n} X_{u_i} \setminus \bigcup_{i \leq m} X_{v_i}| = \aleph_0. \tag{3.16}$$

Siano $u_1, \dots u_n, v_1 \dots v_m$ sottoinsiemi di ω distinti. $\forall i \leq n, \forall j \leq m$ esiste α_{ij} che sta in $u_i \setminus v_j$, oppure in $v_j \setminus u_i$. Sia S un sottoinsieme finito di ω che contiene tutti gli α_{ij}. Vale

$$|\{S \in [\omega]^{<\omega} : \{\alpha_{ij}\}_{i,j} \subseteq S\}| = \aleph_0$$

Per costruzione vale $S \cap u_i \neq S \cap v_j$. Sia $T = \{S \cap u_i : i \leq n\}$. Allora (S,T) sta in X_{u_i} per ogni $i \leq n$, per definizione, e S non sta in X_{v_j} per ogni $j \leq m$ perché $S \cap v_j$ é diverso da tutti gli elementi di T; quindi $S \cap v_j \notin T$ e $(S,T) \notin X_{v_j}$. Per ogni S tale che $\{\alpha_{ij}\}_{i,j} \subseteq S$, vale

$$(S,T) \in (\bigcap_{i \leq n} X_{u_i} \setminus \bigcup_{i \leq m} X_{v_i})$$

che quindi ha cardinalità $\aleph_0$. $\square$

Teorema 3.6.3 (Pospišil)**.** *$\beta\omega$ ha cardinalità $2^{2^{\aleph_0}}$.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente esiste $A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ famiglia indipendente con $|A| = 2^{\aleph_0}$. Consideriamo $\forall f : A \to \{0,1\}$, l'insieme

$$G_f = \{X \in A : f(X) = 1\} \cup \{\omega \setminus X : X \in A \ \wedge \ f(X) = 0\} \cup$$
$$\cup \ \{X \in A : |\omega \setminus X| < \aleph_0\}.$$

G_f ha la P.I.F; infatti, siano $A_1, \dots, A_n \in G_f$. Vogliamo far vedere che $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che nessuno degli A_i stia nel filtro di Fréchet. Ora, a meno di riordinarli, esiste un $r \leq n$ tale che

$$A_1, \dots, A_r \in \{X \in A : f(X) = 1\}$$
$$A_{r+1}, \dots, A_n \in \{\omega \setminus X : X \in A \ \wedge \ f(X) = 0\}.$$

Poiché A è indipendente, vale

$$|A_1 \cap \dots \cap A_r \cap A_{r+1} \cap \dots \cap A_n| = \aleph_0.$$

Per il Lemma 2.1.5 e il Teorema 2.1.14 esiste un ultrafiltro $U_f \supseteq G_f$. Inoltre U_f contiene il filtro di Fréchet e quindi ogni suo elemento è infinito.

Per concludere vogliamo dimostrare che a funzioni differenti corrispondono ultrafiltri differenti; sia $X \in A$ con $f(X) \neq g(X)$, ad esempio $f(X) = 1$ e

$g(X) = 0$. Allora da $f(X) = 1$ si ha $X \in G_f \subseteq U_f$, mentre da $g(X) = 0$ si ha $\omega \setminus X \in G_g \subseteq U_g$, pertanto non può essere $U_f = U_g$, altrimenti non sarebbe un filtro. La cardinalità di $\beta\omega$ è quindi data da

$$|\beta\omega| = \left|{}^{A}\{0,1\}\right| = 2^{|A|} = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

□

Poiché in §3.3 abbiamo visto che $\beta\omega$ è separabile, e quindi ha densità $\aleph_0$, possiamo dire, per il Lemma 2.3.16 che il peso $w(\beta\omega) \leq \mathfrak{c}$.

Lemma 3.6.4. *$\beta\omega$ ha peso $\mathfrak{c}$.*

Dimostrazione. Consideriamo il cubo di Tychonov $[0,1]^{\mathfrak{c}}$. Poiché il prodotto di $\mathfrak{c}$ spazi separabili è separabile (2.3.18), $[0,1]^{\mathfrak{c}}$ è separabile.
Sia quindi $D \subseteq [0,1]^{\mathfrak{c}}$ un sottoinsieme denso e numerabile, e sia $f : \omega \to D$ un enumerazione di D.
Per il Teorema 2.3.36, f può essere estesa ad una funzione $\tilde{f} : \beta\omega \to [0,1]^{\mathfrak{c}}$ continua. L'immagine di $\beta\omega$ tramite $\tilde{f}$ è densa in $[0,1]^{\mathfrak{c}}$ poiché contiene D, in quanto $\tilde{f}$ è un estensione di f. Inoltre, $\tilde{f}(\beta\omega)$ è compatto in $[0,1]^{\mathfrak{c}}$, quindi $\tilde{f}(\beta\omega) = [0,1]^{\mathfrak{c}}$.
Poiché $[0,1]^{\mathfrak{c}}$ ha peso $\mathfrak{c}$, per il Lemma 2.3.19, $w(\beta\omega) \geq \mathfrak{c}$, mentre per il Lemma 2.3.16, $w(\beta\omega) \leq \mathfrak{c}$, da cui segue che il peso di $\beta\omega$ è esattamente $\mathfrak{c}$. □

3.7 Altre proprietà

Lemma 3.7.1. *Sia $A \subseteq \omega$ infinito e sia $W_A \subseteq \beta\omega$. Allora W_A è omeomorfo a $\beta\omega$.*

Dimostrazione. Sia $g : A \to [0,1]$ una funzione. Ovviamente g è continua in quanto A, essendo un sottoinsieme di ω eredita la topologia discreta. Sia $f : \omega \to [0,1]$ definita come segue:

$$f(n) = \begin{cases} g(n) & n \in A, \\ 0 & n \notin A. \end{cases}$$

Per il Teorema 2.3.36, f può essere estesa ad una funzione continua $\tilde{f} : \beta\omega \to [0,1]$.
Sia $\tilde{g} = \tilde{f}|_{W_A}$. La funzione $\tilde{g} : W_A \to [0,1]$ estende $g : A \to [0,1]$.
Perciò W_A soddisfa la Proprietà 2.3.37, quindi $W_A = \beta A$.
Poiché A è in biezione con ω, βA è omeomorfo a $\beta\omega$. □

Corollario 3.7.2. *Per un aperto U di $\beta\omega$ vale esattamente una delle seguenti proprietà:*

1) U è contenuto in $\iota(\omega)$,

2) U ha cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$.

Capitolo 4

P-Punti

4.1 Introduzione

Definizione 4.1.1. Siano $A, B \subseteq \omega$. Diremo che A è *quasi contenuto* in B, e scriveremo $A \subseteq^* B$, se $A \setminus B$ è finito.

Definizione 4.1.2. Due insiemi $A, B \subseteq \omega$ infiniti si dicono *quasi disgiunti* (*almost disjoint*) se $|A \cap B| < \aleph_0$.

Una famiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ di insiemi infiniti si dice *famiglia quasi disgiunta* (*almost disjoint family*) se ogni coppia di elementi distinti di $\mathcal{A}$ è quasi disgiunta.

Definizione 4.1.3. Sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia di sottoinsiemi infiniti di ω. Un insieme $B \subseteq \omega$ si dice *pseudo intersezione* di $\{A_i : i \in I\}$ se è quasi contenuto in ogni A_i:

$$\forall i \in I, \ \ B \subseteq^* A_i.$$

Definizione 4.1.4. Un filtro $\mathcal{F}$ su ω si dice *P-filtro* se ogni collezione numerabile di elementi di $\mathcal{F}$ ha pseudo intersezione in $\mathcal{F}$.

Lemma 4.1.5. *Un ultrafiltro libero $\mathcal{F}$ su ω è un P-filtro se e solo se per ogni partizione $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}^*$ di ω, in elementi dell'ideale duale di $\mathcal{F}$, esiste $X \in \mathcal{F}$ tale che:*

$$\forall n \in \omega, \ \ |X \cap A_n| < \aleph_0. \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro libero per cui vale (4.1), e supponiamo $\mathcal{F}$ non sia un P-filtro. Allora $\exists \{A_i : i \in \omega\}$ collezione numerabile di elementi di $\mathcal{F}$, tale che per ogni $B \in \mathcal{F}$, $\exists r \in \omega : B \not\subseteq^* A_r$, ovvero $|B \setminus A_r| = \aleph_0$. Sia ora $C_0 := \omega \setminus A_r$. Ovviamente $C_0 \in \mathcal{F}^*$. Estendiamo C_0 ad una partizione $\{C_i : C_i \in \mathcal{F}^*, \ i \in \omega\}$ di ω. Poiché vale (4.1), $\exists X \in \mathcal{F}$ tale che $\forall i \in \omega \ \ |X \cap C_i| < \aleph_0$. In particolare

$$\aleph_0 > |X \cap C_0| = |X \cap (\omega \setminus A_r)| = |X \setminus A_r| = \aleph_0$$

che conclude la prima parte della dimostrazione.
Per l'altra implicazione, sia $\mathcal{F}$ un P-filtro libero, e consideriamo $\{A_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}^*$ una partizione di ω. Poiché $\mathcal{F}$ è P-filtro, la famiglia $\{A_i^c : i \in \omega\}$ ha pseudo intersezione in $\mathcal{F}$ per definizione; chiamiamo questo insieme B.
Si ha quindi

$$|B \setminus A_i^c| = |B \cap A_i| < \aleph_0$$

□

Definizione 4.1.6. Un sottoinsieme B di uno spazio topologico X si dice *P-insieme* se per ogni collezione numerabile $\{U_i\}_{i\in\omega}$ di intorni di B, $\bigcap\{U_i\}_{i\in\omega}$ è ancora un intorno di B.

Definizione 4.1.7. Un punto $x \in X$ si dice *P-punto* se $\{x\}$ è un P-insieme.

Definizione 4.1.8. Uno spazio topologico X si dice *P-spazio* se ogni suo punto è un P-punto.

Osservazione 4.1.9. Una definizione equivalente è la seguente:
Uno spazio topologico X si dice *P-spazio* se per ogni collezione numerabile di aperti $\{O_i\}_{i\in\omega}$, $\bigcap_{i\in\omega} O_i$ è ancora un aperto di X.
Equivalentemente è P-spazio se per ogni collezione numerabile di chiusi $\{C_i\}_{i\in\omega}$, $\bigcup_{i\in\omega} C_i$ è un chiuso di X.

4.2 Lo spazio ω^*

Definizione 4.2.1. D'ora in poi chiameremo *corona* di $\beta\omega$ l'insieme $\beta\omega \setminus \omega$. Ovviamente con la scrittura "$\beta\omega \setminus \omega$" intendiamo lo spazio privato del sottospazio omeomorfo ad ω. Indicheremo la corona con la notazione ω^*.
Per ogni insieme di base W_A di $\beta\omega$, indichiamo con W_A^* il corrispondente aperto di base in ω^*, definito da $W_A^* = W_A \cap \omega^*$.

Osservazione 4.2.2. Ovviamente, lo spazio ω^* è compatto in quanto sottospazio chiuso di uno spazio compatto. É chiuso perché complementare di $\iota[\omega] = \bigcup_{n\in\omega} W_{\{n\}}$.

Lemma 4.2.3. *In ω^*, vale:*

$$A \subseteq^* B \iff W_A^* \subseteq W_B^*.$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$A \subseteq^* B \iff \forall p \in \omega^* \, (A \in p \implies B \in p).$$

($\rightarrow$) Prima di tutto notiamo che se p appartiene alla "corona" di $\beta\omega$, allora p contiene il filtro di Fréchet. Quindi, poiché p filtro, se $A \in p$, allora anche $A \cap (\omega \setminus n) \in p$, per ogni $n < \omega$. Ora, $A \subseteq^* B$ se e solo se $A \setminus B$ è finito, quindi esiste $m < \omega$ tale che $A \cap (\omega \setminus m) \subseteq B$ (in particolare vale prendendo $m = max(A \setminus B) + 1$). Quindi, poiché B contiene $A \cap (\omega \setminus m) \in p$, anche $B \in p$.
($\leftarrow$) Se $A \not\subseteq^* B$, allora $A \setminus B$ è infinito, e possiamo trovare un ultrafiltro $p \in \omega^*$ che contiene $A \setminus B$. Allora chiaramente $A \in p$ perché sovrainsieme di $A \setminus B$, e $B \notin p$ poiché $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$. $\square$

Definizione 4.2.4. Si dice *cellularità* di uno spazio topologico X (*Souslin number*), la massima cardinalità di una famiglia di aperti disgiunti di X. In altre parole, la cellularità di uno spazio X è il numero

$$c(X) = \min \left\{ \begin{array}{l} k : \text{ogni famiglia di aperti non vuoti a due a due disgiunti} \\ \quad\quad \text{di } X \text{ ha cardinalità} \leq k \end{array} \right\}$$

Esempio 4.2.5. Ogni spazio separabile ha cellularità minore o uguale ad $\aleph_0$. Infatti, supponiamo per assurdo che X sia uno spazio topologico con cellularità maggiore di $\aleph_0$ e sia D un sottoinsieme denso di X numerabile. Per la Definizione 2.3.4, ogni aperto di X interseca D, quindi ogni famiglia di aperti disgiunti di X, banalmente, non può avere più elementi di D.
Segue quindi che $\beta\omega$ ha cellularità esattamente $\aleph_0$. Infatti, per quanto abbiamo detto, $c(\beta\omega) \leq \aleph_0$ essendo separabile, e poiché gli aperti di base $\{W_{\{n\}} : n \in \omega\}$ sono a due a due disgiunti, si ha $c(\beta\omega) = \aleph_0$.

Proposizione 4.2.6. *Siano $A, B \subseteq \omega$ infiniti. Se A e B sono quasi disgiunti, allora in ω^*, $W_A^* \cap W_B^* = \emptyset$.*

Dimostrazione. Siano A, B due sottoinsiemi di ω infiniti quasi disgiunti. Gli elementi di ω^* contengono il filtro di Fréchet, quindi non possono avere elementi finiti. Poiché per ipotesi $A \cap B$ è finito, $W_A^* \cap W_B^*$ è vuoto. □

Utilizzando la Proposizione 4.2.6 vediamo che lo spazio ω^* ha peso esattamente $\mathfrak{c}$.
Infatti, se esistesse una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di ω quasi disgiunti di cardinalità $\mathfrak{c}$, allora in ω^* potrei trovare una famiglia di aperti a due a due disgiunti $\mathcal{W} = \{W_A^* : A \in \mathcal{A}\}$ per la Proposizione 4.2.6. Questo automaticamente ci dice che la cellularità di ω^* è maggiore o uguale a $\mathfrak{c}$ (vedi Definizione 4.2.4). Poiché una base per uno spazio topologico non può avere meno elementi di una famiglia di aperti disgiunti per la Definizione 2.3.8, seguirebbe che $w(\omega^*) \geq c(\omega^*) \geq \mathfrak{c}$; ed essendo $\mathcal{B}^* = \{W_B^* : B \subseteq \omega \text{ infinito}\}$ una base per ω^* di cardinalità $\mathfrak{c}$, si avrebbe subito $w(\omega^*) = \mathfrak{c}$.
Vediamo quindi che una famiglia quasi disgiunta di cardinalità $\mathfrak{c}$ su ω^* effettivamente esiste.

Lemma 4.2.7. *Esiste una famiglia quasi disgiunta di sottoinsiemi di ω di cardinalità $\mathfrak{c}$.*

Dimostrazione. Identifichiamo ω con l'insieme numerabile dei razionali $\mathbb{Q}$.
Per ogni $r \in \mathbb{R}$ consideriamo una successione $(q_n^r)_{n\in\omega}$ di numeri razionali, che converge ad r. Sia quindi $A_r = \{q_n^r : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{Q}$.
Consideriamo due numeri reali distinti s, r, e prendiamo $\epsilon > 0$ tale che $(s - \epsilon, s + \epsilon) \cap (r - \epsilon, r + \epsilon) = \emptyset$. Poiché le successioni (q_n^s) e (q_n^r) convergono ad s e r rispettivamente, per la Definizione 3.5.2, $A_s \cap (s - \epsilon, s + \epsilon)$ e $A_r \cap (r - \epsilon, r + \epsilon)$ sono cofiniti, quindi, poiché $(s - \epsilon, s + \epsilon)$ e $(r - \epsilon, r + \epsilon)$ sono disgiunti, si ha $|A_s \cap A_r| < \aleph_0$, per ogni s, r numeri reali distinti.
Quindi la famiglia $\{A_r : r \in \mathbb{R}\}$ è quasi disgiunta e ha cardinalità $\mathfrak{c}$. □

Lemma 4.2.8. *Un punto $p \in \omega^*$ è un P-punto se e solo se è un P-filtro.*

Dimostrazione. Un punto p di ω^* è un P-punto se l'intersezione di una collezione numerabile di intorni di p è ancora un intorno di p. In particolare, p è un P-punto se l'intersezione di una famiglia numerabile di intorni di base di p è ancora un intorno di base di p. Sia allora $\{W_{A_i}^* : i < \omega\}$ una famiglia numerabile di intorni di p. Allora p è P-punto se e solo se esiste $A \subset \omega$ infinito tale che $p \in W_A^* \subseteq \bigcap\{W_{A_i}^* : i < \omega\}$, se e solo se, $W_A^* \subseteq W_{A_i}^*$ per ogni $i \in \omega$, se e solo se, per quanto visto nel Lemma 4.2.3, A è quasi contenuto in ogni A_i, ovvero A è pseudo intersezione di $\{A_i : i < \omega\}$ e $A \in p$, se e solo se p è P-filtro. □

4.3 Lo spazio ω^* in ZFC

In questa sezione vediamo cosa possiamo dire dello spazio ω^* senza ulteriori ipotesi insiemistiche. In particolare, esporremo il Teorema di esistenza di weak P-points di Kenneth Kunen (4.3.5).

Proposizione 4.3.1. *ω^* contiene punti che non sono P-punti.*

Dimostrazione. Supponiamo che ogni punto di ω^* sia un P-punto, ovvero che ω^* sia un P-spazio. Allora gli insiemi G_δ sono aperti e gli insiemi F_σ sono chiusi per quanto visto nell'Osservazione 4.1.9. Segue quindi che i sottoinsiemi numerabile di ω^* sono chiusi e discreti.
Sono chiusi perché ω^* è T_1, e quindi i singoletti sono chiusi, e poiché gli insiemi F_σ sono chiusi lo è anche l'unione; inoltre da questo segue che i sottoinsiemi numerabili di ω^* sono anche compatti.
Sono discreti perché i sottoinsiemi G_δ sono aperti, perciò lo sono anche i singoletti. Ma allora ogni sottoinsieme numerabile di ω^* è finito, e di conseguenza anche ω^*, assurdo. $\square$

4.3.1 Weak P-points

Come vedremo nel prossimo capitolo (§4.4) Walter Rudin dimostrò che con l'ipotesi del Continuo, esistono $2^{\mathfrak{c}}$ P-punti in ω^*. In questo capitolo esponiamo il teorema di K. Kunen, che dimostrò, in ZFC, che esistono weak P-points che non sono P-punti.

Definizione 4.3.2. Un punto $x \in X$ si dice *weak P-point* se per ogni sottoinsieme numerabile F di $X \setminus \{x\}$, si ha $x \notin \overline{F}$.

Definizione 4.3.3. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su ω, $\mathcal{F}^*$ il suo ideale duale e supponiamo $\mathcal{F}^*$ contenga l'ideale dei sottoinsiemi finiti di ω.

Diremo che una famiglia di sottoinsiemi di ω, $\{A_i : i \in I\}$ è *esattamente n-connessa rispetto a $\mathcal{F}$* se le intersezioni di esattamente n elementi della famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ non appartengono all'ideale $\mathcal{F}^*$, mentre le intersezioni di $n+1$ elementi di $\{A_i\}_{i\in I}$ sono finite.
In altre parole $\{A_i\}_{i\in I}$ è *esattamente n-connessa rispetto a $\mathcal{F}$* se

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in [I]^n \quad & \bigcap_{i\in\sigma} A_i \notin \mathcal{F}^* \quad \text{e} \\ \forall \delta \in [I]^{n+1} \quad & \bigcap_{i\in\delta} A_i \text{ è finita.} \end{aligned}$$

Diremo che una famiglia $\{A_{i,n} : i \in I, 1 \leq n < \omega\}$ è un *sistema connesso rispetto ad $\mathcal{F}$* se:

a) per ogni $n \geq 1$, $\{A_{i,n} : i \in I\}$ è esattamente n-connessa rispetto a $\mathcal{F}$;

b) per ogni $n \geq 1$, per ogni $i \in I$, $A_{i,n} \subseteq A_{i,n+1}$.

Diremo che $\{A^j_{i,n} : i \in I, n \geq 1, j \in J\}$ è una *famiglia I per J indipendente rispetto a $\mathcal{F}$* se:

a) per ogni $j \in J$, $\{A^j_{i,n} : i \in I, n \geq 1\}$ è un sistema connesso rispetto ad $\mathcal{F}$,

b) per ogni sottoinsieme finito τ di J, per ogni $j \in \tau$, $n_j \geq 1$ e σ_j sottoinsieme di n_j elementi di I, si ha

$$\bigcap_{j\in\tau}\left(\bigcap_{i\in\sigma_j} A^j_{i,n_j}\right) \notin \mathcal{F}^*.$$

Lemma 4.3.4. *Esiste una famiglia $2^{\aleph_0}$ per $2^{\aleph_0}$ indipendente rispetto al filtro di Fréchet.*

Teorema 4.3.5 (Kunen). *Esistono $2^{2^{\aleph_0}}$ weak P-points in ω^* che non sono P-punti.*

Utilizzando il Lemma 4.3.4, Kunen costruisce, per ogni h in $\{f : f : 2^{\aleph_0} \to 2\}$, una particolare famiglia crescente di lunghezza $\mathfrak{c}$ di filtri su ω, $(\mathcal{F}^h_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}}$, in modo che nessun P-filtro possa estendere gli elementi della famiglia, e che l'unione di ogni famiglia sia un weak P-point di ω^*.
La dimostrazione completa del Teorema 4.3.5 si può trovare in [11].

4.4 Lo spazio ω^* sotto CH

4.4.1 CH implica l'esistenza di P-punti

Teorema 4.4.1. *L'intersezione di una famiglia numerabile di aperti di ω^* è vuota, o contiene un aperto non vuoto.*

Dimostrazione. Sia $\{G_i : i \in \omega\}$ una famiglia di aperti di ω^* la cui intersezione contiene un punto $p \in \omega^*$. Esistono insiemi $E_i \subseteq \omega$ infiniti, tali che

$$p \in W^*_{E_i} \subseteq G_i$$

L'intersezione di ogni collezione finita di $W^*_{E_i}$ è aperta e non vuota, quindi l'intersezione di ogni collezione finita di E_i è ancora un sottoinsieme infinito di ω. Consideriamo quindi una successione strettamente crescente di numeri interi (a_i) tale che

$$\forall i \in \omega \quad a_i \in E_1 \cap \cdots \cap E_i.$$

Consideriamo ora l'insieme $\omega \supseteq E := \{a_i\}_{i\in\omega}$.
Allora $E \setminus E_i$ è finito per ogni $i \in \omega$, quindi $E \subseteq^* E_i$, da cui, per il Lemma 4.2.3, $W^*_E \subseteq W^*_{E_i}$. Ora, poiché E è infinito, $W^*_E \neq \emptyset$, e $W^*_E \subset \bigcap_{i\in\omega} G_i$. □

Teorema 4.4.2 (Rudin)(CH). *ω^* ha $2^{2^{\aleph_0}}$ P-punti.*

Dimostrazione. Consideriamo $\{W^*_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ un enumerazione dei sottoinsiemi clopen di ω^*, con $W^*_0 = \omega^*$. Per CH, ogni indice α è un ordinale numerabile, essendo $\mathfrak{c} = \aleph_1$ il primo ordinale non numerabile.
Costruiamo la famiglia $\mathcal{S} = \{A_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ di sottoinsiemi clopen di ω^* nel seguente modo:

· $A_0 = \omega^*$,

· per $\alpha > 0$, supponiamo di aver già costruito $\mathcal{S}_\alpha = \{A_\beta : \beta < \alpha\}$ in modo che $\bigcap \mathcal{S}_\alpha \neq \emptyset$. Per il Teorema 4.4.1, esiste un sottoinsieme clopen non vuoto C_α contenuto in $\bigcap \mathcal{S}_\alpha$.
Parallelamente costruiamo quindi una famiglia di clopen non vuoti $\{C_\alpha\}_{\alpha \leq \mathfrak{c}}$ tali che per ogni α, $C_\alpha \subseteq \bigcap S_\alpha$. Ora, se $C_\alpha \cap W^*_\alpha = \emptyset$, poniamo $A_\alpha = C_\alpha$, altrimenti $A_\alpha = C_\alpha \cap W^*_\alpha$.

Poniamo

$$A = \bigcap_{\alpha < \aleph_1} A_\alpha. \tag{4.2}$$

Poiché gli insiemi A_α sono chiusi in ω^* e hanno la proprietà dell'intersezione finita, per il Lemma 2.3.2, $A \neq \emptyset$.
D'altra parte, se $A \cap W^*_\alpha \neq \emptyset$ per qualche α, allora, per la scelta di A_α, $A \subseteq W^*_\alpha$. Poiché gli insiemi W^*_α formano una base di chiusi per ω^*, possiamo concludere che l'insieme A consiste di un solo punto p.
Se U è un aperto che contiene p, allora per qualche α si ha $p \in W^*_\alpha \subseteq U$, poiché $\{W^*_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ è una base di aperti per ω^*, quindi $A_\alpha \subseteq U$. La famiglia $\{A_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ è linearmente ordinato dall'inclusione; infatti, ad ogni passo della costruzione di $\mathcal{S}$, prendiamo un clopen di ω^* che sia contenuto nell'intersezione degli elementi precedenti. Inoltre, tale famiglia forma una base nel punto p.

Ora, se $\{U_i : i \in \omega\}$ è una collezione numerabile di aperti contenenti p, allora esistono ordinali α_i tali che $A_{\alpha_i} \subseteq U_i$. Se β è il più piccolo ordinale maggiore di ogni α_i, allora $A_\beta \subseteq \bigcap_i U_i$. Quindi p è un P-punto per ω^*.

Per vedere che ci sono $2^\mathfrak{c}$ P-punti in ω^*, vediamo semplicemente ad ogni passo della precedente costruzione (per ogni $\alpha < \mathfrak{c}$) abbiamo almeno 2 candidati disgiunti per la scelta di C_α.
Infatti, ad ogni passo, utilizzando il Teorema 4.4.1, possiamo prendere $C_\alpha \subseteq \bigcap \mathcal{S}_\alpha \cap W^*_\alpha$, oppure $\bar{C_\alpha} \subseteq \bigcap \mathcal{S}_\alpha \cap (W^*_\alpha)^c$, che chiaramente sono disgiunti, ed entrambi soddisfano le condizioni per la costruzione di $\mathcal{S}$. Poiché effettuiamo questa scelta $\mathfrak{c}$ volte, possiamo subito stabilire che le possibili famiglie $\{C_\alpha\}_{\alpha \leq \mathfrak{c}}$ sono almeno $2^\mathfrak{c}$.
A famiglie $\{C_\alpha\}_{\alpha \leq \mathfrak{c}}$ distinte corrispondono P-punti distinti. Infatti, siano $\{\tilde{C}_\alpha\}_{\alpha \leq \mathfrak{c}}$, e $\{\hat{C}_\alpha\}_{\alpha \leq \mathfrak{c}}$ due famiglie distinte. Allora per qualche $\beta < \mathfrak{c}$ si avrà $\tilde{C}_\beta \subseteq W^*_\beta$, mentre $\hat{C}_\beta \subseteq (W^*_\beta)^c$. Dette $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ e $\hat{\mathcal{S}} = \{\hat{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ le corrispondenti famiglie costruite come sopra, si avrebbe $\tilde{A}_\beta \subseteq W^*_\beta$, mentre $\hat{A}_\beta \subseteq (W^*_\beta)^c$. Segue quindi che le corrispondenti intersezioni $\tilde{A} = \{p\}$, e $\hat{A} = \{q\}$ (4.2), sono contenute in aperti disgiunti di ω^*, da cui p e q non possono coincidere.

Possiamo quindi limitare il numero i P-punti in ω^* nel seguente modo:

$$2^\mathfrak{c} \leq |\{p \in \omega^* : p \text{ è un P-punto}\}| \leq |\omega^*| = 2^\mathfrak{c}.$$

□

Teorema 4.4.3 (Rudin)(CH)**.** *Siano $p, q \in \omega^*$ due P-punti. Allora esiste un omeomorfismo $h : \omega^* \to \omega^*$ tale che $h(p) = q$.*

La dimostrazione del Teorema 4.4.3 si può trovare in [10]. Come conseguenza di questo Teorema, sempre in [10], si dimostra che ω^* ha esattamente $2^\mathfrak{c}$ automeomorfismi.

Corollario 4.4.4. *ω^* non è omogeneo.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.3.1, in ω^* ci sono sia P-punti che non P-punti, e gli automeomorfismi di ω^* non possono mandare gli uni negli altri. $\square$

4.5 L'esistenza di P-punti sotto $\neg CH + MA$

In questo capitolo vediamo che l'esistenza di P-punti può essere provata anche senza utilizzare l'Ipotesi del Continuo. Useremo uno degli Assiomi di Forcing, l'Assioma di Martin, che è consistente con cardinalità del continuo arbitrariamente grandi. Poiché d'ora in poi non faremo assunzioni riguardanti la cardinalità di $\mathfrak{c}$, possiamo concludere che tutto ciò che stabiliremo sarà vero in $ZFC + \neg CH + MA$.

4.5.1 Preliminari

Definizione 4.5.1. Siano $f, g \in \omega^\omega$ (con ω^ω intendiamo $\{f : \omega \to \omega\}$). Diremo che g *quasi-domina* f, e si indicherà $f \leq^* g$ se:

$$|\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}| < \aleph_0.$$

Definizione 4.5.2. Una famiglia di funzioni $D \subseteq \omega^\omega$ si dice *dominante* se:

$$\forall f \in \omega^\omega \ \exists g \in D \ \text{ tale che } \ f \leq^* g.$$

Definizione 4.5.3. Si chiama *numero di dominanza* ($\mathfrak{d}$) la cardinalità minima di una famiglia dominante;

$$\mathfrak{d} = \min\{|D| : D \text{ famiglia dominante}\}$$

Osservazione 4.5.4. Chiaramente, ω^ω è una famiglia dominante, quindi possiamo maggiorare $\mathfrak{d}$ con $|\omega^\omega| = {\aleph_0}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.
D'altraparte, $\mathfrak{d}$ non può essere $\aleph_0$. Infatti, supponiamo che D sia una famiglia dominante numerabile. Sia $D = \{f_n : n \in \omega\}$, e definiamo una funzione $f \notin D$ come segue:

$$f(n) = \max\{f_i(n) : i \leq n\} + 1$$

É chiaro che f domina D; infatti, per ogni n, si ha

$$|\{k \in \omega : f(k) > f_n(k)\}| \geq |\{k : k \geq n\}| = \aleph_0.$$

Abbiamo quindi stabilito la seguente disuguaglianza:

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}. \tag{4.3}$$

Osservazione 4.5.5. Ovviamente CH implica $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ per quanto appena visto.

Teorema 4.5.6. *MA implica $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni in ${}^\omega\omega$, con $|\mathfrak{F}| < \mathfrak{c}$.
Definiamo un ordine parziale P come segue:

Gli elementi di P sono coppie (s, E) dove s è una funzione parziale da qualche n finito in ω, ed E è un sottoinsieme finito di $\mathfrak{F}$.

Diciamo che $(s, E) \leq (s', E')$ se:

1) s estende s',

2) E contiene E' e

3) per ogni $f \in E'$, e per ogni $n \in (dom(s) \setminus dom(s'))$ vale $s(n) > f(n)$.

P è ccc; infatti, per ogni coppia di elementi $(s, E), (s, E')$ di P in cui la prima componente coincide, l'elemento $(s, E \cup E')$ è tale che

$$(s, E \cup E') \leq (s, E) \text{ e } (s, E \cup E') \leq (s, E')$$

quindi i due elementi sono compatibili. Poiché P è unione numerabile di insiemi compatibili, non può avere anticatene più che numerabili.

Poniamo, per ogni $n \in \omega$, sia $D_n = \{(s, E) : n \in dom(s)\}$, e per ogni $f \in \mathfrak{F}$, $D_f = \{(s, E) : f \in E\}$.

Per ogni n e per ogni f, gli insiemi D_n e D_f sono densi in P.
Sia (s, E) un elemento di P. Che D_f è denso è banale; infatti, l'elemento $(s, E \cup \{f\}) \ni D_f$ è tale che $(s, E \cup \{f\}) \leq (s, E)$.
Supponiamo ora che $dom(s) < n$, e vediamo che esiste un elemento di $(s', E') \in D_n$ tale che $(s', E') \leq (s, E)$. É chiaro che se $n \in dom(s)$, (s, E) già sta in D_n e non c'é nulla da dimostrare. Sia $E = \{f_i : i \leq m\}$, e costruiamo la funzione s' di dominio n nel seguente modo:

$$s'(k) = \begin{cases} s(k) & k \in dom(s) \\ \max_{i \leq m}\{f_i(k) + 1\} & k \notin dom(s) \end{cases}$$

La coppia $(s', E) \in D_n$ è tale che $(s', E) \leq (s, E)$. Infatti, la funzione s' estende s, e per costruzione soddisfa le condizioni 2) e 3), quindi D_n è denso in P.
Per ipotesi, $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{D_f : f \in \mathfrak{F}\}$ ha meno di $\mathfrak{c}$ elementi, quindi per l'assioma di Martin esiste un filtro G $\mathcal{D}$-generico.
Sia h una funzione definita nel seguente modo:

$$h(n) = k \text{ se esiste } (s, E) \in G \text{ con } s(n) = k$$

Poiché G è un filtro, la funzione h è ben definita.
Infatti, se esistessero $(s, E), (s', E')$ in G tali che $s(n) \neq s'(n)$ per qualche $n < \omega$, allora non esisterebbe alcuna coppia $(t, F) \in G$ tale che t estende sia s che s', il che contraddice la Definizione 2.2.44.
Inoltre, dal fatto che G è $\mathcal{D}$-generico, e quindi interseca ogni D_n, si ha $dom(h) = \omega$.
Sia ora $(s, \{f\}) \in D_f \cap G$. Allora, se n non appartiene al dominio di s, allora, poiché G è un filtro, esiste $(s', \{f\}) \leq (s, \{f\})$ tale che $s'(n) > f(n)$, da cui $h(n) > f(n)$.
Quindi h così definita domina ogni funzione $f \in \mathfrak{F}$. □

4.5.2 MA implica l'esistenza di P-punti

Lemma 4.5.7. *Sia $\mathcal{F}$ un filtro su ω che estende il filtro di Fréchet, generato da meno di $\mathfrak{d}$ elementi, e sia $\{X_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{F}$. Allora esiste $X \subseteq \omega$ tale che X è pseudo-intersezione di $\{X_n : n < \omega\}$, e $|X \cap Y| = \aleph_0$ per ogni $Y \in \mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, possiamo assumere $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$. Per ipotesi, $\mathcal{F}$ è generato da meno di $\mathfrak{d}$ elementi. Consideriamo quindi la base $\mathcal{B} = \{Y_\alpha\}_{\alpha<\delta} \subseteq \mathcal{F}$, dove chiaramente $\delta < \mathfrak{d}$. Per ogni $Y \in \mathcal{F}$ esiste $Y_\alpha \in \mathcal{B}$ tale che $Y \supseteq Y_\alpha$. Ora, per ogni $Y_\alpha \in \mathcal{B}$, definiamo

$$f_{Y_\alpha} \in \omega^\omega \quad \forall n \in \omega \quad f_{Y_\alpha}(n) = \min(Y_\alpha \cap X_n)$$

Poiché $\delta < \mathfrak{d}$, esiste una funzione $f \in \omega^\omega$ tale che $f \not\leq^* f_{Y_\alpha}$ per ogni $\alpha < \delta$. Poniamo ora

$$X = \bigcup_{n\in\omega} X_n \cap f(n)$$

Rimane ora da dimostrare che l'insieme X così costruito soddisfa la tesi del lemma. Per prima cosa vediamo che X è pseudo-intersezione della famiglia $\{X_n\}_{n\in\omega}$, ovvero, che $\forall n < \omega$, $X \setminus X_n$ è finito. Infatti, per ogni n, si ha

$$X_n \supseteq X_k \supseteq X_k \cap f(k) \ \forall k \geq n,$$

quindi

$$X \setminus X_n \subseteq X \setminus \left(\bigcup_{k\geq n} X_k \cap f(k) \right) \subseteq \bigcup_{k<n} X_k \cap f(k)$$

in cui l'ultimo membro è chiaramente finito.

Ora, vediamo che per ogni $Y \in \mathcal{F}$, $|X \cap Y| = \aleph_0$. Per prima cosa vediamo che $X \cap Y \neq \emptyset$. Infatti, fissato $\alpha < \delta$, consideriamo la funzione f_{Y_α} e prendiamo $n \in \omega$ tale che $f(n) > f_{Y_\alpha}(n) = \min(Y_\alpha \cap X_n)$. Ora si ha

$$f_{Y_\alpha}(n) = \min(Y_\alpha \cap X_n) \in f(n) \cap (X_n \cap Y_\alpha) \subseteq X \cap Y_\alpha,$$

e, poiché $\mathcal{B}$ base di filtro, e quindi ogni $Y \in \mathcal{F}$ contiene qualche $Y_\alpha \in \mathcal{B}$, si ha $X \cap Y \neq \emptyset$, $\forall Y \in \mathcal{F}$.

Ora vediamo che se $X \cap Y$ è non vuoto, allora deve essere infinito; infatti, supponiamo per assurdo che $X \cap Y$ sia finito. Allora, poiché $\mathcal{F}$ estende il filtro di Fréchet, anche $Z := \omega \setminus (X \cap Y) \in \mathcal{F}$, e quindi anche $Y \cap Z$ sarà un elemento del filtro. Ma allora $\emptyset = X \cap (Y \cap Z)$, in contraddizione con quanto appena dimostrato. □

Lemma 4.5.8 (Lemma dell'unione). *Sia A una famiglia di insiemi di cardinalità k, con $k \geq \aleph_0$. Sia, per ogni $a \in A$, $|a| \leq k$. Allora $|\bigcup A| \leq k$.*

Teorema 4.5.9 (Ketonen, 1976). *Se $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, allora esistono P-punti.*

Dimostrazione. Usando il Lemma 4.5.7, e l'assunzione $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, costruiremo induttivamente un P-filtro. Per farlo, costruiremo una catena crescente di filtri $\mathcal{F}_\alpha$, con $\alpha < \mathfrak{c}$, e ad ogni passo stabiliremo la proprietà del P-filtro per una collezione numerabile di sottoinsiemi di ω. Poiché le collezioni numerabili di sottoinsiemi di ω sono $\mathfrak{c}$, fissiamone un enumerazione

$$\{S_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}. \tag{4.4}$$

Assumiamo che tali collezioni siano decrescenti, ovvero per ogni α, esiste una successione di sottoinsiemi infiniti di ω, $X_0^\alpha \supseteq X_1^\alpha \supseteq \dots$ tale che $S_\alpha = \{X_n^\alpha : n \in \omega\}$.

Iniziamo ponendo $\mathcal{F}_0$ come il filtro di Fréchet.

Procediamo per induzione transfinita sugli ordinali minori di $\mathfrak{c}$.

Passo successore: $\beta = \alpha + 1$. Consideriamo il filtro $\mathcal{F}_\alpha$, e la collezione decrescente $S_\alpha = \{X_n^\alpha : n \in \omega\}$. Ora, abbiamo due possibilità:

1) è possibile estendere il filtro $\mathcal{F}_\alpha$ con la famiglia S_α, ottenendo così un filtro $\mathcal{F}'_\alpha$;

$$\mathcal{F}'_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} Z \subseteq \omega : Z \supseteq Y \cap X_n^\alpha \text{ per qualche } Y \in \mathcal{F}_\alpha, \\ \text{e per qualche } X_n^\alpha \in S_\alpha \end{array} \right\} \tag{4.5}$$

Per induzione, $\mathcal{F}_\alpha$ è generato da meno di $\mathfrak{c}$ elementi. Vediamo che quindi questo vale anche per $\mathcal{F}'_\alpha$. Infatti, detto $\{Y_\beta : \beta \leq \gamma\}$ un insieme di elementi che genera $\mathcal{F}_\alpha$, con $\gamma < \mathfrak{c}$, per (4.5), $\mathcal{F}'_\alpha$ sarà generato da al più $|\gamma| \times \aleph_0 < \mathfrak{c}$ elementi.
Possiamo quindi applicare il Lemma 4.5.7 a $\mathcal{F}'_\alpha$, e trovare un insieme $X^\alpha \subseteq \omega$ che è pseudo intersezione della famiglia S_α, e che ha intersezione non vuota con ogni elemento del filtro F_α. A questo punto possiamo estendere il filtro $\mathcal{F}'_\alpha$ con l'insieme X^α, e ottenere un filtro che ancora sarà generato da meno di $\mathfrak{c}$ elementi.
Poniamo quindi

$$\mathcal{F}_{\alpha+1} = \{Z \subseteq \omega : Z \supseteq Y \cap X \text{ per qualche } Y \in \mathcal{F}'_\alpha\} \tag{4.6}$$

2) Qualche X_n della famiglia S_α ha intersezione vuota con qualche elemento del filtro $\mathcal{F}_\alpha$. In questo caso poniamo semplicemente $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha$.

Passo limite: $\beta = \bigcup\{\alpha : \alpha < \beta\}$. In questo caso poniamo

$$\mathcal{F}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{F}_\alpha \tag{4.7}$$

$\mathcal{F}_\beta$ è generato da meno di $\mathfrak{c}$ elementi.
Infatti $\mathcal{F}_\beta$ è generato dall'unione, per $\alpha < \beta$, dei generatori di $\mathcal{F}_\alpha$, che quanto visto prima sono meno di $\mathfrak{c}$. Per il Lemma 4.5.8, quindi, anche i generatori di $\mathcal{F}_\beta$ sono meno di $\mathfrak{c}$.

Ora vogliamo far vedere che il filtro $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mathfrak{c}$ è un P-filtro.
Per prima cosa stabiliamo che $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro; infatti, sia $X \subseteq \omega$. Allora esiste una famiglia $S_\alpha = \{X_n^\alpha : n \in \omega\}$ tale che $X_n^\alpha = X$ per ogni n; abbiamo quindi due possibilità:

1) X è stato aggiunto al filtro $\mathcal{F}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{F}$;

2) la famiglia $S_\alpha = \{X_n^\alpha : n \in \omega\} \ni X$ non è stata aggiunta al filtro $\mathcal{F}_\alpha$. Ma allora esiste $Y \in \mathcal{F}_\alpha$, tali che $X \cap Y = \emptyset$, ovvero $Y \subseteq \omega \setminus X$. Poiché $\mathcal{F}_\alpha$ è un filtro, e quindi chiuso per sovrainsiemi, si ha $\mathcal{F}_\alpha \ni \omega \setminus X$.

Quindi $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro, e appartiene alla "corona" di $\beta\omega$ in quanto contiene il filtro di Fréchet per costruzione. Resta quindi da dimostrare che $\mathcal{F}$ è un P-filtro.

Fissiamo una successione decrescente di elementi di $\mathcal{F}$, $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots$; Avendo numerato tutte le successioni di questo tipo nella famiglia $\{S_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$, esisterà un α tale che $S_\alpha = \{X_n : n \in \omega\}$. Per costruzione, al passo $\alpha + 1$, la successione $\{X_n : n \in \omega\}$ è stata aggiunta al filtro $\mathcal{F}_\alpha$, e con essa, anche la pseudo intersezione X. Poiché lo stesso è stato fatto per ogni famiglia numerabile di insiemi nel filtro, $\mathcal{F}$ è P-filtro.
Ora, per il Lemma 4.2.8, si ha la tesi. □

Capitolo 5

Conclusione

In questo capitolo introdurremo, senza dimostrarlo, il Teorema *P-points indipendence theorem* di Saharon Shelah (1982) che afferma che è consistente con ZFC che in ω^* non esistono P-punti.

5.1 Teorema di indipendenza di Shelah

Teorema 5.1.1 (Shelah, 1982)**.** *É consistente con ZFC che non esistono P-punti*

La dimostrazione completa del Teorema di Shelah (5.1.1) si può trovare in [7]. Nella dimostrazione si costruisce un modello per ZFC con cardinalità del continuo $\mathfrak{c} = \aleph_2$.
Rimase un problema aperto fino ai giorni nostri, come si vede in [8], se fosse possibile costruire un modello in cui non esistono P-punti con cardinalità del continuo arbitraria.

5.2 Risultati recenti

La risposta alla domanda sopra citata arrivò nel 2017, con l'articolo di David Chodounský, Osvaldo Guzmán [12], in cui dimostrarono che la non esistenza di P-punti è consistente con cardinalità del continuo arbitrariamente grandi $\mathfrak{c} \geq \aleph_2$.

Bibliografia

[1] Thomas Jech - *Set Theory.*
Springer, Third Millenium Edition (2006)

[2] Dikran Dikranjan - *Appunti Topologia 1*

[3] Franco Parlamento - *Lezioni Logica 2*

[4] Jan Van Mill - *Introduction to* $\beta\omega$, (p. 503 - 567)
In: K. Kunen, Jerry E. Vaughan, *Handbook of Set-Theoretic Topology.*
North - Holland (1984)

[5] Peter T. Johnstone - *Stone spaces*, (p. 69 - 79).
Cambridge University Press (1982)

[6] Judith Roitman - *Introduction to Modern Set Theory.*
Wiley-Interscience Publication (1990)

[7] T. Bartoszynski, H. Judah - *Set Theory, On the Structure of the Real Line.*
A K Peters, Wellesley, Massachusetts (1995)

[8] W. Wohofsky - *On the existence of p-points and other ultrafilters in the Stone-Čech-compactification of* $\mathbb{N}$.
Master Thesis, Vienna University of Technology (2008)

[9] K. Ciesielski - *Set Theory for the Working Mathematician.*
London Mathematical Society (1997)

[10] Walter Rudin - *Homogeneity Problems in the Theory of Čech Compactification* (1956), (p. 81 - 92)
In: M. Katětov, P. Simon - *The Mathematical Legacy of Eduard Čech.*
Birkhäuser Verlag (1993)

[11] K. Kunen - *Weak P-points in* $\mathbb{N}^*$ (1978), (p. 100 - 108)
In: M. Katětov, P. Simon - *The Mathematical Legacy of Eduard Čech.*
Birkhäuser Verlag (1993)

[12] David Chodounský, Osvaldo Guzmán - *There are no P-points in Silver Extension.*
Israel Journal of Mathematics (2017)

[13] K. P. Hart, J. Nagata, J.E. Vaughan - *Encyclopedia of General Topology.*
North - Holland (2004)

Indice analitico